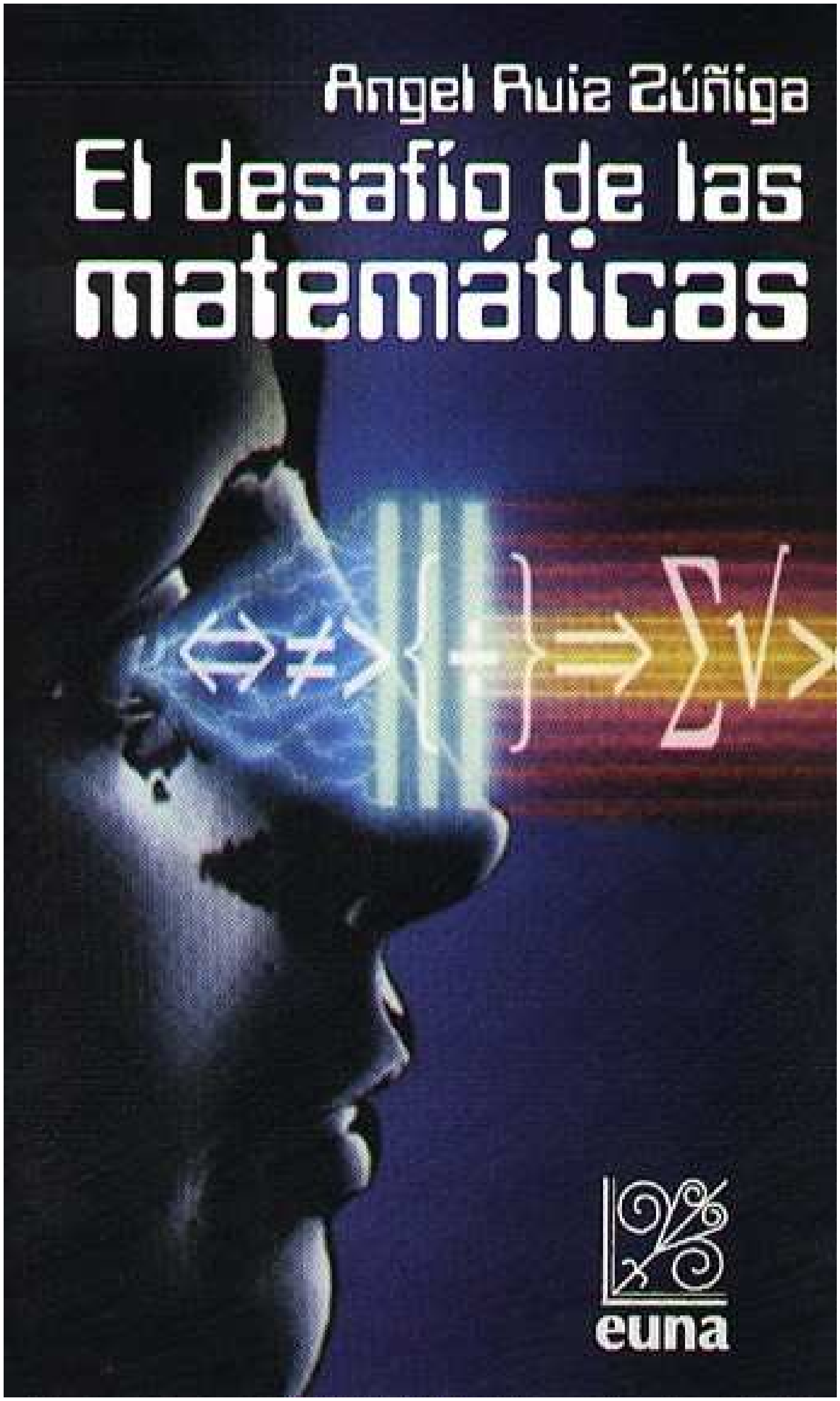
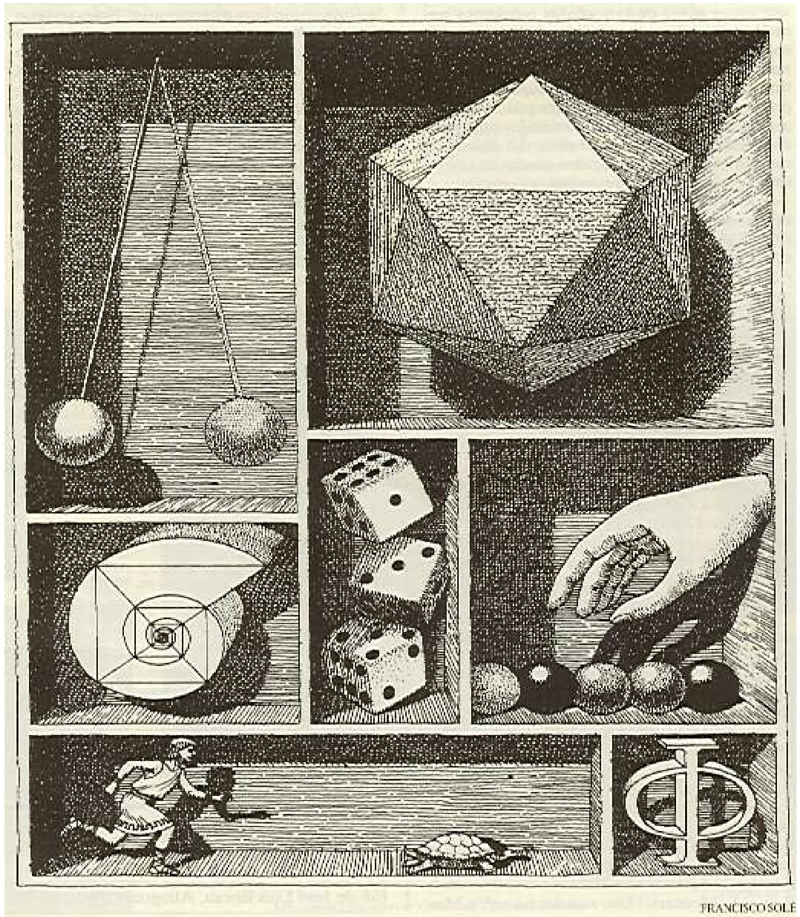


Editorial de la Universidad de Nacional

Primera edición, 2000

Índice

PREFACIO



¿Quién puede ocultar que existen problemas en las matemáticas de Costa Rica? Los resultados persistentemente poco positivos en las pruebas nacionales de Sexto y Noveno grados y del Bachillerato [1] constituyen apenas una muestra, pero también son su evidencia las malas promociones en los cursos de matemáticas en las universidades públicas. [2] ¿Acaso no existe un sinsabor común en nuestra ciudadanía en torno a las matemáticas? Y, al mismo tiempo, ¿quién puede negarle importancia a las matemáticas en las ciencias y la tecnología modernas? Nadie duda que se trata de un auténtico fundamento de nuestro conocimiento y nuestra manipulación de la realidad. Es un asunto anclado en los orígenes íntimos de la ciencia. Con su empirismo Bacon fue profeta de la nueva ciencia , pero también fueron sus profetas Galileo y Newton, quienes hicieron de las matemáticas instrumento privilegiado para la explicación científica. Sin duda: la conjunción simbiótica de indagación empírica y descripción matemática es la quintaesencia de la ciencia natural. Entonces llegamos a una conclusión de entrada: las matemáticas, por un lado despiertan frustración, temor y hasta rechazo, pero por el otro generan estima, reconocimiento de su valor y de su necesidad intelectuales. ¿Un dilema? O, tal vez, ¿un desafío?

En todo este escenario tenemos, además, un condicionante histórico: nuestra época, una transición que se escapa de la modernidad , ha definido entre sus ejes de existencia un papel aun más determinante del vector cognoscitivo: economía, cultura, creencias y costumbres se someten cada vez más a este designio. Entonces: esta doble situación de problema y demanda vuelve inevitable una pregunta tajante, ¿estamos en condiciones para hacer crecer las matemáticas que requiere el apuntalamiento de las ciencias y la tecnología para convertirlas en un motor del progreso nacional? No es posible responder con certeza en un sentido o en otro: todo depende de las voluntades individuales y colectivas que asuman las decisiones. Probablemente, a priori, se deba fraccionar la contestación: algunas acciones avanzarán esa causa, otras empujarán un sentido contrario. Lo que debemos preguntarnos: ¿cuál será la resultante?

El momento parece ser el propicio para abordar con seriedad y energía esta problemática. Desde hace años, el país está consciente de la amenaza que representa el fracaso sostenido en las matemáticas, solo que ahora los retos de la nueva etapa histórica impiden aplazar indefinidamente las soluciones. Sea cual sea la resultante histórica, hay un requisito intelectual: la más amplia reflexión en todas las dimensiones posibles. Y ese es nuestro propósito: contribuir al esclarecimiento sobre las opciones que tenemos como colectividad.

Finalmente, deseo agradecer a la Universidad Nacional , y en especial a su Facultad de Filosofía y Letras, por la oportunidad que me ha dado para presentar esta obra a nuestra comunidad nacional. El Certamen UNA-Palabra constituye una de las pocas y valiosas tradiciones en nuestro país de estímulo y reconocimiento al arte del ensayo. Me permito expresarles a todas las personas que lo hacen posible mi mayor gratitud.

Angel Ruiz

Ciudad Universitaria "Rodrigo Facio"

Diciembre de 1998

I. LA RELEVANCIA DE LA EDUCACIÓN MATEMATICA

El territorio que nos resulta más decisivo de escudriñar es el de la educación matemática. No porque pensemos que la creación de matemática, que sí se hace en nuestro país (aunque no sea el hecho muy conocido), no sea tan importante. Lo es, y más aun: resulta decisiva en todos los plazos, aunque especialmente en el largo. Lo que sucede es que la educación matemática está en la base no solo de la creación de matemática, sino de algo más relevante: la formación intelectual que requiere la ciudadanía para fortalecer las ciencias, las tecnologías y, en buena parte, la capacidad de razonamiento , la lógica , y la criticidad que necesitamos para escalar esta escarpada época. De muchas formas, lo que acontezca con la educación matemática influirá directa y drásticamente lo que pase con el conjunto de la educación nacional y, por ende, con el destino de las estrategias colectivas de progreso del país. Por eso, deliberadamente, en las líneas que siguen se encontrará una vocación educativa.

En los problemas actuales de la educación matemática pesan muchas de las debilidades de la educación nacional: aquellas derivadas de la reducción del gasto público en educación (entre 1980 y 1997) [3], otras de la reducción general de la exigencia académica (el peso del "facilismo" y la subestimación de la capacidad de los estudiantes), y no menos importante: el predominio de filosofías educativas que, por vías diferentes, han debilitado el valor de la instrucción de calidad. [4] A estos factores sombríos habría que añadir la manipulación política de una educación considerada tantas veces como botín electoral , la forma burocrática y excesivamente centralizada de organizar la educación nacional, y, de la misma manera, las tendencias nacionales que durante décadas han fomentado la ineficiencia e inepcia de los funcionarios públicos. Algunos de ellos son pecados de un estilo nacional de desarrollo que aunque tocó sus fronteras a mediados de los años ochenta, no ha terminado de extinguirse; otros, son debidos a la transición que vivimos. Nadie puede negar, tampoco, la influencia de recientes decisiones políticas, gubernamentales o legislativas, que han debilitado el estatus del gremio magisterial, y otras, ya no tan recientes, que han colocado al educador como un profesional "de segunda" o "tercera". Las conclusiones si son honestas no llaman al optimismo; el cuadro general esta pintado de grandes nubarrones. Por eso lo primero que debemos resaltar es la compleja dificultad que tendrá cualquier estrategia educativa en la Costa Rica de hoy. Como punto de partida, esto constituye una advertencia ineludible. Vayamos a las matemáticas con este fardo encima.

De primera entrada, podemos señalar los problemas más evidentes, que son muchos: insuficiente el número de profesores calificados en todos los niveles, y de medios permanentes de capacitación (bastante de eso por el debilitamiento del estatus del docente y la ausencia de incentivos para unas carrera y práctica profesionales que, de hacerse bien, son muy exigentes); a la debilidad en los recursos humanos se suma la de los materiales, que van desde la infraestructura básica, el mantenimiento de aulas, tiza, servicios, pasando por los textos hasta los materiales didácticos. También están los problemas de gestión como el asegurar las condiciones de partida para la labor en la clase: la continuidad de los docentes y los alumnos, por ejemplo. No debe dejarse por fuera la existencia de currícula matemáticos que, en buena medida, se han escapado de la realidad histórica que enfrentamos desde hace rato. Y, más que eso último, una implacable debilidad para llevar a la práctica lo que se aprueba y condensa en el papel, para darle continuidad a las acciones: un divorcio pertinaz entre el discurso y la realidad.

En todo lo anterior, no se puede olvidar que el enfoque filosófico sobre las matemáticas y su enseñanza dominante desde hace más de treinta años en universidades y colegios, en el "gremio", ha contribuido también a la crisis: una matemática fría, sobrecargada de lenguaje abstracto innecesario y muchos formalismos, una matemática vacía separada de la acción constructiva por el estudiante, y ajena a los planos más intuitivos. Si ya era un problema la dificultad inherente al estatus epistemológico de las matemáticas (su implacable abstracción: el territorio de lo general), los enfoques, programas y métodos inadecuados apuntalaron el rechazo de las matemáticas entre los estudiantes, los padres de familia y hasta los mismos maestros y profesores.

Visto todo globalmente: la conjunción de los recursos humanos y materiales que hemos dispuesto, con la organización institucional, y las ideas, actitudes y programas existentes no solo no lograron ni logran una gestión eficaz para los estándares de la modernidad que se escapa, sino, lo que es más grave, para la nueva fase histórica que tenemos literalmente encima. Algo se ha arreglado en los últimos años, más como producto de acciones generales en la educación que otra cosa: cambios curriculares, textos y recursos didácticos, algunas capacitaciones, replanteamientos filosóficos, más recursos económicos, algunos estímulos docentes; pero los cambios realizados están muy lejos de la magnitud necesaria y, más aun, de la perspectiva que se debería tener.

Me parece oportuno poner en relieve la pertinencia de enfrentar estos problemas en las matemáticas con relación al país. Precisamente porque las matemáticas son un reflejo directo privilegiado de la educación nacional (los indicadores de promoción, las ausencias y debilidades pertinaces en recursos humanos y materiales), responder con voluntad y energía a sus dificultades puede contribuir, con visión, a responder a los problemas generales de la educación nacional. Enfrentar el desafío de la educación matemática hoy puede ser una de esas tareas medulares que sirvan como pivote nacional para dotar a las nuevas generaciones de costarricenses de la educación de calidad que demanda el nuevo momento histórico.

Pero la situación posee una relevancia adicional por razones circunstanciales: la inversión de empresas de alta tecnología (como INTEL) en Costa Rica. Su impacto puede ser formidable para la vida nacional. Lo directo: se requieren ya más de 13.000 profesionales y técnicos en alta tecnología. Lo indirecto: el prestigio de las inversiones ya existentes puede generar muchas otras. Las demandas serán crecientes. En los últimos años incluso se ha hablado de crear un corredor tecnológico . De manera general, sin que se pueda dar por asegurado, la alta y mediana tecnologías pueden llegar a ser uno de esos nichos competitivos que siempre hemos tratado de vislumbrar. Evidentemente, todo dependerá de muchas acciones no solo locales: que la empresa tecnológica no sea más que un enclave (como otrora las bananeras) sin relación simbiótica con el entorno no solo depende de nosotros. Eso es claro. Pero también hay oportunidades que dependerá de nosotros el aprovecharlas. ¿Qué hacer colectivamente para beneficiarnos de las nuevas oportunidades? Obviamente asegurar infraestructura, carreteras, aeropuertos, servicios y mano de obra calificada son una parte de la ecuación; algunas profesiones y técnicas deberán ser prioritarias en esa dirección. Otra parte es la optimización del accionar de las burocracias locales. Nuestros gobernantes parecieran tener esto claro. Pero aquí queremos subrayar lo que no estamos seguros que también esté claro para ellos: el reclamo de la perspectiva de más largo aliento. En este fértil territorio reside la oportunidad de un ambicioso plan nacional que fortalezca las ciencias, la tecnología y las matemáticas que hagan sostenible , perdurable, el proyecto de la alta tecnología y, tal vez, éste nutra el desarrollo en Costa Rica. La educación está en el corazón de este núcleo de realidades y oportunidades. En el largo plazo, y con la mirada puesta en la simbiosis cognoscitiva que lúcidamente se puede propiciar, será imprescindible una formación matemática de calidad (aunque no exclusivamente). Responder a estas condiciones con sabiduría y prontitud aumentaría las posibilidades nacionales de progreso. En resumen: sin ánimo de restar importancia a otras disciplinas de la educación costarricense, considero que existe la oportunidad, justificación, y conveniencia nacional para una inversión de gran nivel en las matemáticas. Por supuesto esto es un asunto político y que exige consenso cultural en el país. Esta es otra de las visiones que matizan nuestras líneas.

Un indagación capital: ¿bastará una inversión substancial en las matemáticas para resolver sus problemas y reconstruirlas como vector de progreso nacional? ¿Son solo problemas de apoyo logístico los que atraviesa la educación matemática de nuestro país? Esto es un tema complejo: sin duda, mucho se podría resolver con el soporte de recursos y la voluntad política, pero aun así quedarían pendientes varios asuntos que convocan una indagación teórica más profunda.

El hablar de las matemáticas no es algo sencillo. Ya no solo en la escala de los problemas nacionales, sino en aquellos planos propios del territorio del pensamiento más general, incluso en la filosofía. ¿Por qué las matemáticas han ocupado ese lugar central y creciente en la explicación científica de la realidad?, ¿por qué esta disciplina considerada por algunos un mero "lenguaje" ha resultado tan decisiva para el progreso cognoscitivo? Las preguntas son muchas: ¿son las matemáticas una ciencia?, ¿existe de verdad la llamada armonía entre matemáticas y realidad, como podrían sugerir los pitagóricos?, ¿se podrá establecer para las matemáticas un "criterio de demarcación" que nos distinga lo que es y no es ciencia? Sobre estos interrogantes las respuestas siguen siendo muchas, y no dejan de tener importancia epistemológica, por lo tanto para la educación y, entonces, para aquellas dimensiones nacionales fundamentales para el progreso colectivo. Visto el asunto con la perspectiva más general: detrás de las acciones políticas o la acción prospectiva posible se esconden importantes y complejos asuntos: el sentido y la naturaleza de las matemáticas . Los diversos planos no poseen intersección vacía y, entonces, el proponer lo contrario resultaría impropio, falto de rigor. La conclusión salta a la luz: la respuesta al qué hacer con las matemáticas y los problemas nacionales de su enseñanza-aprendizaje debe nutrirse de varias reflexiones; entre ellas, de la más profunda sobre el qué son estas disciplinas cognoscitivas, cuyos significados siempre han resultado extraños, complejos y cautivantes para las mentes de muchas generaciones. Del ¿qué son las matemáticas? deberemos buscar respuestas al ¿cómo se aprenden?, fundamento de ¿cómo se enseñan? Y si estos interrogantes admiten contestación, deberemos establecer si ¿será posible empujar las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje con una estrategia política y social positiva? Y si para esto último la respuesta resulta afirmativa ¿quién o quiénes lo deben hacer? Estas interrogaciones nos definen la lógica de las ideas que deseamos introducir en este trabajo. Nuestras demandas provocan la intervención combinada de varios planos conceptuales: históricos, filosóficos, educativos, políticos. En buena medida, este "entrecruzamiento" de planos constituye el mejor lugar para buscar las respuestas al desafío de las matemáticas.

II. EN LA HERENCIA DE UNA REFORMA

Para avanzar en lo anterior, en primer lugar, debemos ubicarnos en el tiempo. C onviene hacer una reseña de algunos aspectos decisivos en la evolución de las matemáticas y su enseñanza en las últimas décadas; y en esto la perspectiva regional, incluso internacional, es la mejor para poder colocar apropiadamente a Costa Rica en el escenario. En síntesis: las matemáticas y su enseñanza se vieron condicionadas en América Latina por una reforma realizada en los años sesenta en casi todos nuestros países, que modificó curricula , programas, métodos, objetivos y la visión de la naturaleza de las matemáticas.

Las ideas dominantes hasta nuestros días sobre las matemáticas siempre pusieron énfasis en sus aspectos más abstractos, deductivos, incluso axiomáticos y formales, debilitando los intuitivos, vitales, heurísticos, concretos. Esto fue un importante punto de partida para las reformas de las llamadas "matemáticas modernas" que buscaban transformar el carácter anticuado, calculístico , memorístico y "poco general" de las matemáticas enseñadas en primaria y secundaria. Sus énfasis fueron la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicoformales , y las generalizaciones abstractas. En América Latina, las matemáticas se cargaron de esa ideología y de una manía por un "purismo" matemático que apuntaló un distanciamiento de las matemáticas con relación a las ciencias, la tecnología y la economía. La reforma contribuyó a uno de los principales defectos de la ciencia latinoamericana: el academicismo .

La ideología de las "matemáticas modernas" conecta íntimamente con el racionalismo : una tendencia epistemológica que enfatiza la razón en los criterios de verdad en el conocimiento. Esta se contrapone al empirismo que afirma que se dirime la verdad de una proposición a través de la experiencia sensorial. Para el racionalismo la mente produce verdades a priori , absolutas e infalibles. Otra de la ideas que se ha incorporado dominantemente en la concepción de las matemáticas es la que asume su carácter fundamental como axiomático y formal: la construcción y la validez de las matemáticas dadas por procesos mentales y su configuración en esencia axiomática y formal; obviamente la experiencia sensorial queda aquí excluida. La realidad es que este es un asunto viejo. Las matemáticas han sido vistas persistentemente como el paradigma del conocimiento verdadero: más aún, la prescripción para establecer la verdad y la certeza. Y en esta percepción existen influjos históricamente decisivos: uno de ellos los Elementos de Euclides hace 2500 años. Su organización deductiva y axiomática penetró todas las épocas siguientes para definir lo que se ha pensado sobre la naturaleza de las matemáticas. Recuérdese que el gran Newton en su Principia e, incluso, el filósofo Spinoza en su Etica, acudieron a la forma de exposición euclidiana para buscar "fortalecer" sus argumentos. Ya abundaremos sobre estos asuntos.

La reforma nació como una posible solución de un problema importante para la educación matemática: cerrar la distancia entre la práctica matemática de los investigadores profesionales universitarios y la matemática en la primaria y la secundaria. Por medio del lenguaje de conjuntos y con recursos tomados de las nuevas matemáticas quisieron integrar las matemáticas como una sola disciplina: el paso de las matemáticas a la matemática. La reforma se inició en Europa (especialmente Francia) y los Estados Unidos; luego se extendería a América Latina y a otras latitudes. Fueron los textos y los cambios curriculares los principales mecanismos para empujar la reforma.

Este movimiento internacional por la implantación de nuevas matemáticas quería enseñarlas como una disciplina integrada por conceptos unificadores de los conjuntos, relaciones, funciones y operaciones, las estructuras fundamentales de grupo, anillo, cuerpo y espacio vectorial, y con la rigurosidad del llamado método "axiomático". Otras propuestas eran: adoptar el simbolismo moderno, dar mayor importancia al empleo de gráficas, la eliminación de gran parte del álgebra tradicional; algo sumamente grave: la modificación y prácticamente eliminación de la geometría euclidiana tradicional. Un famoso grito de guerra de los reformadores fue: "Abajo Euclides".

Debe señalarse que aunque la mayoría estuvo a favor de esa reforma hubo voces de discordia. Por ejemplo, Jean Kuntzmann fue tajante:

"La introducción de la matemática moderna en la enseñanza secundaria ha sido reforzada por una orquestación exterior proveniente, en particular, de miembros de la enseñanza superior. Esta presión, tal vez, fue útil para acelerar la evolución, pero crea una situación anormal. El empleo frecuentísimo del término "moderno", la impresionante oposición establecida entre las matemáticas de "antes" y las de "después" corre el riesgo de dar a una parte de los maestros la impresión de que ya no están al día. Por el contrario, lo que hay que hacer es desmitificar las nociones nuevas, mostrar que se trata de nociones que todo el mundo conoce y manipula sin saberlo y no de nociones terriblemente abstractas y complicadas. La novedad principal es que estas nociones han recibido un nombre y por eso mismo han cobrado una consistencia que no tenían antes". [5]

El gran historiador de las matemáticas Morris Kline, decía:

"Las nuevas matemáticas, como un todo, corresponden al punto de vista del matemático superficial, que sabe apreciar solamente pequeños detalles deductivos y distinciones estériles y pedantes como aquella entre número y numeral, y que pretende realzar lo trivial con una terminología y un simbolismo impresionantes y sonoros. Se nos ofrece una versión abstracta y rigurosa de la matemática, que oculta su rica y fructífera esencia y hace hincapié en generalidades poco inspiradoras, aisladas de todo otro cuerpo de conocimiento. Se subrayan sofisticadas versiones finales de las ideas simples, mientras se tratan superficialmente las ideas más profundas, lo que conduce necesariamente al dogmatismo. El formalismo de este plan solamente puede conducir a una disminución de la vitalidad de las matemáticas y a una enseñanza autoritaria, al aprendizaje mecánico de nuevas rutinas, mucho más inútiles que las rutinas tradicionales. Resumiendo, pone de relieve la forma a expensas de lo sustancial y presenta lo sustancial sin pedagogía ninguna."

En los fundamentos de esa reforma pesó mucho el grupo francés llamado Nicolás Bourbaki, conformado por brillantes y prestigiosos matemáticos con una gran proyección internacional. Pero, como lo decía Kuntzmann: en general los cambios estuvieron bajo el comando de matemáticos con poco o ningún interés pedagógico. [6]

Las ideas que buscaron justificar esta reforma conectaban con las ideas dominantes de siempre: el racionalismo y el énfasis excesivo de lo axiomático en la naturaleza de las matemáticas. Pero, además, fue realizada por especialistas que a la vez que no atribuían importancia a la pedagogía eran portadores de ideas erróneas sobre las matemáticas. Estas ideas todavía son importantes en el horizonte intelectual, aunque han sido ampliamente criticadas en la comunidad matemática internacional.

Los países periféricos trataron de adaptarse a los cambios propuestos. En América Latina la reforma se inició en 1960 al llegar textos norteamericanos con las nuevas orientaciones. Sin embargo, fue la primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática en Bogotá, en 1961, lo más decisivo: delegados de los países americanos y famosos matemáticos europeos como Choquet, Schwartz, Pauli y Bundgaard, se reunieron bajo la dirección del insigne matemático norteamericano Marshall Stone. En esa conferencia se creó el Comité Interamericano de Educación Matemática para impulsar la reforma en los diferentes países.

Si estudiamos el asunto de una manera general, la implantación de estas reformas siguió un patrón común en los países periféricos: un impacto que no es realizado a través de meras ideas, sino de individuos y organismos precisos. En nuestro caso, el Comité Interamericano de Educación Matemática se encargó de la transmisión. Casi todos los matemáticos asumieron esta tarea; las universidades y las autoridades educativas la apoyaron. Aunque los ritmos fueron distintos en cada país el patrón fue el mismo. Todo en el mundo de las matemáticas se vio condicionado por este proceso.

No dejaron de existir en todo esto algunas razones políticas: el Sputnik soviético (primer satélite en el espacio) preocupó a las esferas políticas de Occidente. Había que acelerar en ciencias, tecnología y matemáticas para competir: eran los tiempos de la Guerra Fría. La OEA, la National Science Foundation de los Estados Unidos y los gobiernos asumieron compromisos políticos y económicos. La reforma de las matemáticas les "caía al pelo", o el contexto político internacional "caía al pelo" para la reforma.

Esta reforma de la matemática en la segunda enseñanza comenzó a aplicarse en Costa Rica desde el curso lectivo de 1964, codificada incluso en los programas oficiales existentes. La misma empezó a permear la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todas sus dimensiones: profesores, estudiantes, métodos y planes de desarrollo. Por ejemplo, para enfrentar la falta de preparación por parte de los profesores de las instituciones de enseñanza media y llevar a cabo exitosamente la reforma, el Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad de Costa Rica puso en marcha un plan de estudios que culminaría con un título de Profesor de Matemáticas , para formar con las nuevas ideas a los profesionales que enseñarían en la secundaria.

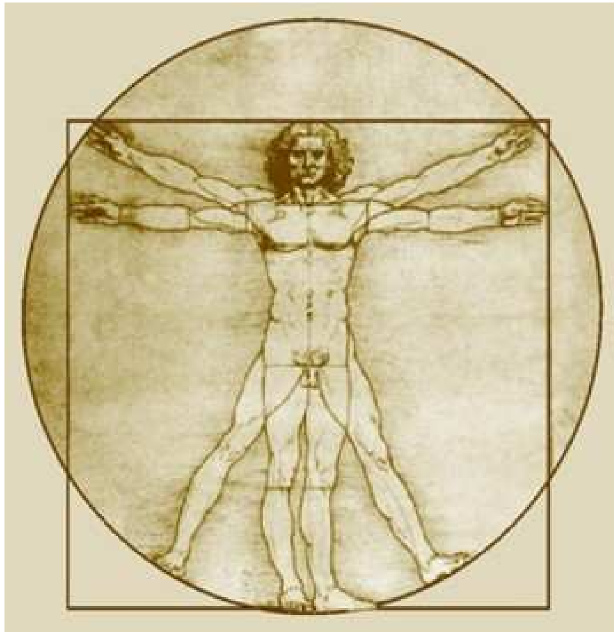
Una vez cambiados los programas y escritos los textos según la nueva orientación, la realidad es que hasta hace poco tiempo pocos cambios se dieron en la educación matemática de nuestro país. Los programas entre 1964 y 1995 solamente expresaron diferencias de forma o la incorporación o eliminación de algunos contenidos; no hubo cambios substanciales. Estamos hablando de más de 30 años, y eso es mucho. [7]

A partir de los años setenta se inició un fuerte proceso de distanciamiento de la comunidad internacional de educadores de la matemática con relación a las premisas y objetivos de la reforma. En los años ochenta, la nueva dirección se ha orientado hacia la promoción de los aspectos constructivistas y otros relacionados con el mundo empírico de las matemáticas. Sin embargo, se trata de un nuevo camino que apenas está empezando a dar sus frutos y que tomará mucho tiempo para definir su rostro completamente; pero no hay duda: los principales esfuerzos en la comunidad de educadores de las matemáticas se colocan dentro de esta perspectiva teórica. Volveremos a esto con mayor detalle.

Simultáneamente, se ha ido desarrollando una renovación del pensamiento sobre la naturaleza y el sentido de las matemáticas, que busca recuperar las dimensiones empíricas y sociales de las mismas. Y muy especialmente el carácter histórico de las construcciones matemáticas. Esto último es esencial: las aproximaciones históricas permiten evidenciar el rostro humano de las matemáticas; permiten resaltar su naturaleza social , temporal , concreta . En nuestra opinión, el incremento de la presencia y uso de la historia como un recurso decisivo en la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, es un signo del avance de visiones filosóficas que se alejan de los paradigmas dominantes del pasado: la existencia de modificaciones en la percepción que se tiene sobre la naturaleza de las matemáticas. ¿Hasta dónde esto ha evolucionado?, ¿existe una visión diferente de recambio sobre la naturaleza de las matemáticas?, ¿cuánto terreno ha ganado una visión empirista y constructivista? Es algo difícil de asegurar. Pero la evidencia se puede encontrar en las publicaciones y en las reuniones internacionales. Es, también, apenas natural que sea precisamente en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas donde se busque hacer modificaciones. La educación plantea de una manera práctica la mayoría de los problemas epistemológicos centrales, y exige soluciones concretas (que serán siempre sujetas a la crítica, al error y la corrección). La educación es un factor dinámico en el desarrollo de las reflexiones epistemológicas y filosóficas. No sería extraño, entonces, pensar en las comunidades de educadores de la matemática como el medio social más adecuado para construir importantes modificaciones en la percepción de la naturaleza de las matemáticas. En este sentido, lo que se podría conceptualizar como "filosofía de la educación matemática" más que una parte de la filosofía tendría un sentido pragmático integrado a la misma educación matemática. [8]

Esto refuerza nuestra premisa de la vinculación de varios planos: la educación matemática, la filosofía de las matemáticas e, incluso, la política matemática. Como veremos, el sustrato de las nuevas tendencias en el pensamiento sobre las matemáticas y su enseñanza se encuentra en esta intersección de planos. Por eso mismo y antes de analizar estas tendencias modernas que nos pueden dar el marco teórico que existe internacionalmente para nuestras decisiones sobre las matemáticas, nos vemos obligados a hacer un recorrido por el tema que se encuentra en la base de todo: ¿qué son las matemáticas?

III. LAS MATEMATICAS Y EL MUNDO



Nos vamos a permitir el uso de algunas ideas sobre las matemáticas históricamente pertinaces para hacer un recorrido transaccional sobre la percepción de estas disciplinas en Occidente. Una de ellas: la existencia de una "armonía preestablecida" entre las matemáticas y el mundo. ¿Existe realmente? De hecho, debemos empezar por reconocer que ésta ha tenido un papel importante en las visiones racionalistas de las matemáticas. En lo que sigue buscaremos obtener una respuesta a esa indagación dentro de nuestra imagen de las matemáticas, cuyos elementos principales iremos introduciendo de diversas maneras.

Ya en los orígenes de la ciencia griega, con los jónicos que pretendían una explicación naturalista de la realidad, los pitagóricos afirmaban la realidad de acuerdo a principios matemáticos, y también decían que los números y sus relaciones subyacen y muestran el orden [9] de la naturaleza. Es decir: matemáticas y realidad "de la mano". Poco tiempo después, Platón sostenía un mundo de objetos aprehendibles solamente por la razón e independiente de la mente individual: la realidad material era apariencia, inseguridad, cambio. Pero aún en Platón existía armonía: el mundo material estaba determinado (aunque imperfectamente) por esa realidad. [10] Una visión diferente ofrecía Aristóteles: los objetos matemáticos como "universales", entes presentes en muchos. Para él: las cosas materiales son la primera substancia de la realidad, y los "universales" están en las cosas. Para Aristóteles, entre las proposiciones matemáticas y la naturaleza hay correspondencia por ser éstas abstracciones de la naturaleza.

La historia siguió, solo que a grandes saltos: de la Edad Media la "armonía" griega salió convertida en la idea de que Dios creó la naturaleza; pero había un detalle significativo: ésta poseía un orden intrínseco matemático. Las matemáticas mostraban la creación divina. Los nuevos tiempos, la nueva filosofía y la cosmología empujaron entonces a otras posiciones pero sin abandonar totalmente el manto teológico: para Descartes, por ejemplo, las nociones de las matemáticas eran "innatas", intuitivas, pero colocadas por Dios en las mentes. El gran Leibniz, uno de los creadores del Cálculo en el siglo XVII, tampoco se separó de ese manto: las leyes de la matemática y la naturaleza poseen una armonía preestablecida por designio divino. Para éste el conocimiento era innato . Fue Kant quien ya avanzó en una posición tal vez más "moderna", pero apriorística; la verdad de las matemáticas no a través de la experiencia, sino por medio de una intuición espaciotemporal: el orden y la racionalidad que creemos externos están dados por lo interno, por el sujeto. La "armonía" no es aquí designio divino; se trata de una formulación subjetivista pero "humana". Aquí estamos en los fundamentos del racionalismo de la modernidad. Y encontramos armonía entre matemáticas y realidad.

Para la otra tradición epistemológica de la modernidad, el empirismo, las cosas son diferentes. Para una de sus variantes, el inductivismo en el siglo XIX (Mill), no hay realmente armonía preestablecida. Las verdades de las matemáticas son generalizaciones inductivas de la experiencia; eso explicaría su correspondencia con el mundo. Claro, ya para nosotros: este tipo de enfoque no explica la comprobada correspondencia entre teorías matemáticas (no simples generalizaciones) y el mundo; sabemos que las teorías se aplican o, incluso, se adelantan a la experiencia. Ya metidos en el siglo XX, se buscó entender la matemáticas de otra manera al racionalismo y al inductivismo: el empirismo lógico, por ejemplo. En una de sus variantes teóricas: las matemáticas no se refieren al mundo, su naturaleza es sintáctica y convencional . Aquí tampoco hay "armonía preestablecida", solamente "adecuación" de un lenguaje al conocimiento del mundo. En esta visión moderna las matemáticas no son capaces de producir auténtico conocimiento del mundo. Se trata algo así como una "semántica no referencial". A pesar de lo persuasivo y moderno de este enfoque, nos resulta difícil aceptar que éste permita explicar la naturaleza de la construcción matemática y, en particular, su aplicabilidad en el mundo de la experiencia. Volveremos a esto dentro de un marco de explicación mejor.

Desde finales del siglo pasado y durante las primeras décadas del presente, la reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas tuvo un gran desarrollo. Varias tendencias emergieron entre los matemáticos y filósofos. Las principales son las que se identifican con los nombres: logicismo, intuicionismo y formalismo. La primera aproximación afirmaba que las matemáticas se podían reducir a la lógica. Sus figuras más representativas fueron Gottlob Frege [11] y Bertrand Russell (para Frege se reducía la aritmética, para Russell toda la matemática). Para Frege, existían dos tipos de procesos para justificar las matemáticas: los a priori, y los a posteriori. Los segundos estaban excluidos. Entre los primeros Frege encontraba dos opciones: la aritmética se deriva de la lógica (más algunas definiciones del vocabulario aritmético) o se funda en la intuición (como en Kant). En esa dicotomía él escogía la primera opción. Este gran pensador creía que las matemáticas poseían contenido: objetos abstractos, que no estaban en el espacio ni en el tiempo; es lo que se suele llamar con el nombre de platonismo en las matemáticas.

Otra aproximación teórica afirmaba, contrariamente a Frege, que las matemáticas no poseen contenido (ni abstracto ni mucho menos empírico): el formalismo . Algo así como que se trata de un juego formal sin un significado. Su preocupación era esencialmente demostrar la consistencia (ausencia de contradicción lógica) de las matemáticas a través de métodos precisos (finitos). El insigne matemático David Hilbert fue su máximo exponente. [12] En realidad, Hilbert planteaba la existencia de objetos precisos para las matemáticas; decía: "... en el principio (...) era el signo". Es decir: los signos podían ser considerados objetos de las matemáticas.

El tercer enfoque buscaba hacer las matemáticas de otra manera, con base en una intuición temporal (como en Kant pero sin la intuición espacial de aquel), para lo que se veían obligados a rechazar varias partes [13] de las matemáticas clásicas (porque las demostraciones que aceptaban únicamente los intuicionistas no asumían el infinito actual ni la ley lógica del tercero excluido de manera arbitraria [14]). Insistieron en la idea de crear matemáticas constructivistas, con métodos finitistas. Con antecedentes en Kant y el matemático Kronecker, su figura principal fue el matemático holandés L. E. J. Brouwer [15], aunque A. Heyting [16], tiempo después, jugó un papel importante en este enfoque. El gran matemático Poincaré también se asocia a este tipo de posiciones. Muchas veces se usa el término constructivismo para referirse a estos intentos fundacionales en busca de reconstruir las matemáticas sin contradicciones. Esta aclaración es importante porque más adelante vamos a usar este término con un sentido distinto, más propio de las discusiones en la Educación Matemática.

La preocupación común a estas tres aproximaciones teóricas era buscar una fundamentación de las matemáticas que las librara de las contradicciones y paradojas que se habían filtrado desde el siglo anterior: hacer matemática segura, infalible. Detengámonos en esto un poco.

Desde la misma creación del Cálculo diferencial e integral en el siglo XVII por Newton y Leibniz se apreció la existencia de “imprecisiones” (una famosa referencia: el obispo Berkeley atacó la metafísica que encontraba en los nuevos métodos de Newton) e, incluso, contradicciones en los conceptos básicos de la nueva disciplina matemática (la cual constituía el principal logro de las matemáticas modernas, el corazón de su práctica en los siglos XVIII y buen parte del XIX). La derivada, la integral, o la continuidad, exhibían problemas de rigor y consistencia lógica (por ejemplo, series infinitas divergentes que se asumían convergentes, uso de infinitesimales [17]: famosos entes matemáticos que eran menores que cualquier número pero diferentes de 0, etc.) Sin embargo, a pesar de eso las matemáticas crecían como nunca, en un siglo que se suele llamar el "heroico", bajo la mano de insignes matemáticos. Baste mencionar al suizo Euler (padre del análisis matemático: colección de los métodos infinitos en las matemáticas), los Bernoulli (famosa familia de matemáticos también suizos), y una colección impresionante de matemáticos franceses: Clairaut, D'Alembert, Maupertuis, Lagrange, Laplace, Legendre, Condorcet, Carnot. Las preocupaciones por el rigor no podían tener un significado tan grande mientras se tuviera tanto éxito en el desarrollo de las nuevas matemáticas y, muy especialmente, de su aplicación en la física. Aún así, desde el mismo siglo XVIII, empezaron los intentos por solventar las debilidades: todo se concentró en el concepto de límite, hoy común a cualquier texto de Cálculo. Podemos decir que la primera figura que abrió el camino para la reformulación digamos moderna de la idea del "paso al límite" fue D'Alembert, al que le siguieron importantes trabajos de replanteamiento conceptual y rigorización lógica: Bolzano, Abel, Cauchy, Weierstrass, Dedekind que llegan hasta Cantor. [18] Estos trabajos establecieron la pauta, características y sentidos del análisis matemático y su enseñanza hasta nuestros días. [19]

Otros asuntos empujaron más hacia la lógica. Por un lado las geometrías no euclidianas y, por el otro, los cuaterniones de Hamilton. En el primer caso porque rompían con la geometría euclidiana: columna vital de la interpretación del mundo. Se rompía un esquema mental que había resistido incluso la revolución de Copérnico y Galileo en la cosmología. Si eran válidas geometrías que no parecían tener referentes en el mundo, ¿en qué se podían refugiar los matemáticos? Piénsese su impacto en una época cuando las matemáticas eran consideradas la clave de la descripción, manipulación y predicción para nuestra relación con el mundo: matemáticas y mundo en perfecta armonía. Kant había hecho de la intuición del espacio una de sus piezas de explicación de las matemáticas, ¿en qué posición quedaban estas ideas? El rigor lógico aparecía como un reclamo, y también un refugio. Los cuaterniones constituían otro problema: entes matemáticos que no cumplían la ley de la conmutatividad. Las leyes de operación usuales, las "normales", ya no eran únicas. No es que estos asuntos fueran la preocupación principal dentro de la comunidad matemática, lo que a veces se entiende mal, pero sí ocupaban un papel importante.

Pues bien, Frege se colocó en esta tradición: mientras el grueso de matemáticos buscaba fundamentar el análisis y la geometría, él decidió asumir la tarea de fundamentar la aritmética. Para Frege, la tarea central de la reflexión sobre las matemáticas se concentraba en ese objetivo (en general: la fundamentación de las matemáticas). [20] La realidad es que desde entonces el grueso de la filosofía de las matemáticas buscó responder a esa meta. Para ello y de acuerdo a diversas inclinaciones filosóficas previas es que se han desarrollado esos programas específicos muy técnicos (incluso hasta nuestros días). Tanto logicistas, formalistas como intuicionistas, a pesar de sus diferencias, buscaban responder al propósito original de Frege. En cada caso, se trataba de una combinación sutil de filosofías en el sentido general de este término y de mucho contenido logicomatemático . Por ejemplo, fueron preocupaciones fundacionales de este tipo, en el logicismo, las que motivaron Principia Mathematica, la conocida y monumental obra de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead.

Debe mencionarse que el programa preciso de Frege usaba la teoría de conjuntos como uno de sus principales recursos para reducir las matemáticas a la lógica. La obra que debía condensar sus propósitos fundacionales se llamó Grundgesetze der Arithmetik [21] (publicada en dos tomos en 1893 y 1903 respectivamente). En 1902, antes de salir el segundo volumen, Russell descubrió que en el gran edificio de Frege se podían encontrar paradojas. Estas estaban precisamente en los conjuntos. Se trataba de un golpe fuerte a la pretensión fundacional; no era tan fácil librar las matemáticas de la incertidumbre y la contradicción. Russell inició un segundo momento en el programa logicista al tratar de responder a las paradojas a las que contribuyó a descubrir.

No solo en las tiendas del logicismo se vivieron estas decepciones: el formalismo y en general todos los que pretendían asegurar un fundamento a priori para las matemáticas sufrieron una situación similar poco tiempo después. Hilbert había pretendido la formalización [22] de la matemática clásica (alguna gente creyó, incluso, que la naturaleza última de las matemáticas podían ser los sistemas formales) y demostrar la consistencia de los sistemas formales que creaba (la versión más madura de su proyecto la condensó en 1926 [23]). Gödel, un famoso lógico austríaco, descubrió en los años treinta que aquellas pretensiones no podían llevarse a cabo, incluso cuando la parte de las matemáticas en consideración era la aritmética de primer orden. D emostró, entonces, que no era posible asegurar la consistencia de una teoría matemática (suficientemente amplia para contener la teoría de números). [24] Puesto de la manera más general, estos resultados golpeaban el planteamiento original de proporcionar una fundamentación a priori a las matemáticas. Tal vez, podríamos decir que para las matemáticas la demostración deductiva y la validez lógica encuentran fronteras definidas. O lo que expresa lo mismo: las matemáticas no se pueden reducir a la lógica. Hay un llamado al mundo de lo empírico, de la experiencia. Esto no se debe olvidar.

Algunos autores asocian todas estas pretensiones con el conveniente término absolutismo . Veamos esto con más detalle. La visión absolutista en las matemáticas afirma que éstas están constituidas de verdades ciertas e incuestionables: absolutas. El conocimiento matemático sería entonces el campo único de conocimiento cierto (además de la lógica y las proposiciones verdaderas en virtud del significado de sus términos, como por ejemplo "todos los casados no son solteros"). Son los métodos deductivos los que permiten garantizar la verdad de las proposiciones matemáticas. Para la visión absolutista las matemáticas están libres de error: sus verdades son infalibles. Entonces, con este nuevo lenguaje: los problemas con las paradojas de la teoría de conjuntos, o los del formalismo con los resultados de Gödel, podemos decir que constituyen dificultades para las pretensiones del absolutismo en las matemáticas.

La visión de Frege que se negaba a fundamentar las matemáticas en la intuición, su rechazo del empirismo en éstas, y su idea que las proposiciones de las matemáticas no poseen significado, fue asumida como suya -más o menos- por uno de los grupos más influyentes en la filosofía del siglo XX: el neopositivismo. En etapas diferentes, fueron ellos que concibieron el cuerpo de las matemáticas y la lógica como aquel que elabora las convenciones que subyacen el lenguaje; la verdad de sus proposiciones se encuentra gracias al significado de sus términos. Este fue en esencia el enfoque de Carnap (1939), Ayer (1936) y Hempel (1945). A ellos nos referíamos al principio de esta sección. El marco general de estas ideas es entonces el del absolutismo en la matemáticas.

Debemos aclarar, sin embargo, que estos autores no asumían algunas de las ideas de Frege en torno a la lógica: para Frege, los principios de la lógica eran vistos como fundamentales para todo pensamiento, para los neopositivistas la lógica era verdadera por convención. Además, Frege siempre afirmó que la matemática se refería a objetos, aunque peculiares. [25]

Sobre estos asuntos giraría mucho del microcosmos de la filosofía de las matemáticas durante este siglo. De hecho, normalmente muy alejada de la práctica efectiva de los matemáticos y los científicos; y sin relación con asuntos del tipo ¿qué es y cómo progresa el conocimiento matemático?, ¿qué hace que unas teorías matemáticas sean mejores que otras?, ¿cuál es el sentido de las explicaciones matemáticas? Más alejada todavía de temas como ¿cuál es la naturaleza social de los procesos de validación matemática?, y ¿cuál el fundamento social y psicológico de la construcción matemática?

Los problemas del absolutismo o el racionalismo en las matemáticas, arrancan sin embargo desde su mismo punto de partida. La validez de las matemáticas depende de un conjunto de supuestos que se aceptan sin demostración: axiomas o como se les quiera llamar. Eso quiere decir que en la base existen supuestos, premisas, que son a lo sumo creencias, no conocimiento; por lo tanto, expuestos siempre a la duda y al cuestionamiento. No hay certeza absoluta posible. Una de las principales conclusiones a partir de los intentos fundacionales mencionados antes es que, para garantizar la consistencia de un sistema matemático, habría que acudir siempre a otro más poderoso. Entonces, en todas partes encontramos círculos viciosos: o puntos de partida no demostrables o la necesidad de afirmaciones o proposiciones adicionales para la demostración de consistencia; es decir: una expansión sin fin. En nuestra opinión: la crítica del absolutismo constituye la principal fuente de la reflexión contemporánea sobre las matemáticas.

Una nueva visión de las matemáticas que sustituya los anteriores paradigmas cuestionados no existe todavía de manera dominante. Podría decirse que el primero [26] en introducir una visión crítica del paradigma de las matemáticas como verdades infalibles (con una estructuración axiomáticodeductiva) fue Lakatos en los años Sesenta (4 artículos publicados entre 1963 y 1964, y luego recogidos en una publicación en 1976). [27] Frente a lo que el llamó un modelo "euclídeo" de entender las matemáticas, "infalible", ofreció una visión crítica falibilista de éstas. Su visión se suele asociar con el vocablo cuasiempirismo . Para Lakatos las matemáticas son un resultado de una práctica social e histórica. Establece una distinción entre lo que es esa práctica individual y subjetiva (cómo construye matemáticas el matemático) y el cuerpo teórico (el resultado final producido, lo que se podría llamar objetivo) que se valida en una comunidad matemática. La exposición y comunicación de los resultados al gremio matemático y su validación dependen entonces de reglas aceptadas histórica y socialmente. Su preocupación central se separa de las de los intentos absolutistas, los asuntos son otros: ¿cómo se hace la práctica matemática: su dimensión subjetiva pero sobre todo la objetiva y la interrelación entre ellas?

Desde entonces se han producido trabajos en esa dirección como los de Davis y Hersh [28], Kitcher [29] y Kline; y es, precisamente, el marco teórico de partida en el que encuentra sustento nuestro análisis. Este llamado a una nueva visión no podría entenderse al margen de la contribución del nuevo "externalismo" en la disciplina de la historia de la ciencia, que fomenta una contextualización social y gremial de la evolución de la ciencia con Kuhn, Feyerabend, Toulmin, Lakatos, Laudan y otros. La asunción de una visión falibilista de las matemáticas tiene varias implicaciones. El filósofo y educador británico Paul Ernest [30] resume el asunto así:

"El establecimiento del conocimiento matemático como falible y cuasiempírico significa que las matemáticas no están herméticamente selladas y separadas de otras áreas del conocimiento, las actividades y los valores humanos. Esto significa que en las matemáticas al igual que en las ciencias y otras áreas del conocimiento humano el contexto de descubrimiento y de justificación se penetran mútuamente. Consecuentemente, no se les puede negar a los asuntos sociales, culturales y éticos un impacto sobre las matemáticas y el conocimiento matemático y debe admitirse con un rol esencial y constitutivo en la naturaleza del conocimiento matemático". [31]

Pero no nos interesa aquí abundar en el recuento histórico de las ideas sobre las matemáticas, nuestro objetivo es "entrarle al toro por los cuernos" y dirigir nuestra atención directamente a ¿qué son las matemáticas? En esa dirección, vamos a servirnos de los planteamientos de un historiador de las matemáticas: Morris Kline, y, especialmente, un epistemólogo y psicólogo: Jean Piaget.

La interpretación de Piaget es muy original: las estructuras matemáticas coinciden con la realidad porque éstas son las estructuras más generales de la organización de lo real viviente . Sus consideraciones conducen a la biología. Sí hay correspondencia entre matemáticas y realidad, y es completa, [32] las matemáticas deben ser entonces "verdaderas". [33] Sin duda, se da aquí una reformulación del concepto de verdad. Pero sigamos. Para Piaget, esta correspondencia no se da por medio de un proceso de abstracción del objeto: el acuerdo se da a partir de que el sujeto es un ser biológico con condiciones y funciones de autoregulación, autoorganización. Es un caso de un acuerdo más general: el acuerdo entre todo ser vivo y su medio biológico. Dice Piaget: "la organización no es réplica del medio" en el que está el sujeto; y "no hay funcionamiento organizador sin un acuerdo con el medio". Se trata por supuesto de una hipótesis biológica. [34] Aunque su lógica biológica es muy persuasiva, hay algo que no nos termina de cuadrar: la ausencia del carácter aproximado de las teorías de todas las ciencias naturales y de las matemáticas. Y en esto lo que Piaget parece subestimar es el papel del objeto en la construcción matemática de la realidad. Nosotros preferimos una visión más amplia: que además de factores biológicos, introduzca los sociales y físicos. La vinculación entre matemáticas y realidad para Piaget se da a partir de hipótesis generales, y lo que podemos caracterizar, tal vez, como un "apriorismo" biológico. Reiteramos nuestra opinión: su debilidad reside en una relativización muy drástica del objeto socialfísico; es un obstáculo en esta visión teórica. Todo esto va a ser muy importante cuando retomemos el análisis de las tendencias modernas en la educación matemática. Por ejemplo, el caso de las famosas etapas de la evolución psicogenética, una visión ampliamente conocida y usada en psicología y educación en nuestro medio. Para Piaget, estas etapas que se definen sobre la base de estructuras cognoscitivas precisas (de las preoperatorias, operatorías concretas hasta las precisamente formales), dependen esencialmente del sujeto: el objeto casi no participa. Para nosotros, los factores sociales y del mundo físico externo al sujeto influencian la evolución tanto de esas etapas psicogenéticas como, también, las del conocimiento y la cultura: las llamadas sociogenéticas .

¿Son las matemáticas una ciencia natural más? Esto es decisivo: su objeto "particular" las convierte en instrumentos esenciales de la explicación del mundo. Para nosotros, y a diferencia de los apriorismos diversos, las matemáticas no son colocadas meramente por el sujeto en el conocimiento empírico, no se pueden reducir a un factor operativo y organizacional de lo fáctico, donde esto último es un agente pasivo. Para nosotros, el conocimiento físico no es la fusión de lo formal (puesto por el sujeto), y lo empírico (con el simple destino de ser asimilado a los esquemas del sujeto) el contenido. [35] Debemos ser explícitos en esto: por supuesto que no negamos el papel activo del sujeto, ni tampoco rechazamos una subjetivización del objeto. Más lejos aún: compartimos con Piaget la idea de la asimilación de la percepción a las condiciones del sujeto. Pero, esta es la diferencia: para nosotros, la posibilidad de ello nace en las condiciones propias del objeto (independientemente de nosotros). Las matemáticas no son puestas por un sujeto en sí, son un producto combinado de agentes que debe ser sancionado con el criterio último de la experiencia. Eso, si se quiere, convierte nuestra epistemología en empirista (aunque solo en un sentido deliberadamente general). Y responde la pregunta: las matemáticas sí son una ciencia natural. Esta es una definición de partida.

Mill y Kline coinciden en que una de las ventajas de las proposiciones de la matemática ha sido su utilidad durante siglos. [36] Podría sugerirse la palabra: aplicabilidad. Y detrás de esa valoración se expresa algo así como que esa utilidad manifiesta su naturaleza. Nuestra posición es un poco más extrema: existen condiciones de raíz para "lo especial" en las matemáticas. Incluso: su objeto particular es lo que nos debe explicar la "longevidad" de sus resultados, no la historia o la cultura sin más. Es, también, su objeto particular el que nos explica la utilización para validar las matemáticas de otros criterios auxiliares, indirectos, antes de recurrir al inevitable de la sanción práctica. [37] En las matemáticas es necesario subrayar la validez lógica como un criterio efectivo: interviene en la construcción y la validación de las matemáticas. ¿Por qué es esto útil y correcto? ¿Qué hace que las matemáticas se nutran con objetos y métodos distintos a la sanción empírica?

Las matemáticas son conocimiento de "lo general" (una manera de hablar) en el mundo que, como todo conocimiento, surge en una relación entre el sujeto y el objeto (ella misma un factor real). Ahora bien, cuando introducimos el vocablo "lo general" para las matemáticas no pensamos en "universales" (como Aristóteles) que existen en la realidad; para nosotros, se trata de percepciones humanas sobre el mundo: los conceptos de número 2, de 3 o de 526, nacen de condiciones de la realidad. Los substratos materiales para estos conceptos (abstracciones) son objetos empíricos de las matemáticas. Lo mismo sucede con las nociones de plano, recta, y punto. Evidentemente, no encontramos puntos, planos, rectas y números bailando en el mundo empírico (son conceptos), pero es fácil comprender que éstos poseen referentes en la realidad material. Podría sugerirse que propiedades generales del mundo como la diversidad o la extensión son fundamento de partes de las matemáticas; también podría sugerirse la continuidad física. En todo esto no se debe olvidar que la creación de conceptos e, incluso, la percepción de objetos empíricos que sustentan estos conceptos, depende mucho de nosotros: nuestro ojo, nuestra mente, condiciona lo que vemos. Es decir: vemos y conocemos lo que nuestra realidad nos permite. En esta condición, en lo que somos, participan factores biológicos y físicos pero también sociales (culturales e históricos). Esto es importante: lo que vemos es en buena parte nuestra realidad y sus fronteras. Vemos diversidad, pero se podría decir que todo lo que existe es una sola cosa (recuérdese aquella tensión en la Grecia Antigua entre unidad y diversidad: Parménides y Heráclito). Vemos continuidad en la materia, pero los espacios inter y subatómicos nos señalan lo contrario. Lo que vemos y los conceptos con los que comprendemos el mundo dependen de lo que somos y de los límites de nuestro sentidos en particular; por eso, con la creación de instrumentos técnicos superiores, varía nuestra percepción de lo que existe. El cielo estrellado de Aristóteles y Ptolomeo no podía ser el mismo que el de Galileo con su telescopio: el "tamaño" y la cantidad sí importan.

En la comprensión de los objetos empíricos de las matemáticas debe pensarse también en el sujeto: por ejemplo, nuestra capacidad de repetir acciones (en el tiempo) refiere también a la diversidad y a la continuidad. El número, otro ejemplo, no debe verse solamente como algo que encontramos en el objeto físico al margen de nosotros; también lo encontramos al repetir y organizar nosotros acciones. El contar no refiere solo al mundo externo, también al interno: a nosotros. De igual manera, el medir no refiere solo a un mundo "medible" sino, también, a nuestra acción. La conclusión: algunas de nuestras acciones son también substrato material de conceptos matemáticos. Acciones físicas humanas de repetir, agrupar, asociar, revertir, son objetos de las matemáticas, y con las mentales que las "replican" en nuestros cerebros sucede lo mismo. En esto tenía razón Piaget, al colocar un sustrato para las matemáticas en las operaciones y acciones del sujeto. Ahora bien, nos repetimos para que no haya duda alguna: estas acciones no son ajenas a la realidad física externa al sujeto; las cosas "se agrupan", los procesos físicos se "repiten" o se "devuelven", ellos mismos, sin nosotros.

¿Por qué podemos realizar estas acciones y operaciones mentales y éstas se conectan tan bien con el mundo? Por lo menos debido a 2 tipos de razones: porque nuestro ADN nos ha preparado para ello en millones de años de evolución a través del contacto con el mundo (apuntaba bien Piaget: una base biológica); y, en segundo lugar, porque vemos y actuamos directamente sobre la realidad física: el mundo exterior a nosotros nos condiciona permanentemente . Tiene razón Piaget al colocar en relieve el papel del sujeto. Nuestro conocimiento del mundo, tanto individual como colectivamente, es un factor muy dinámico. En la comprensión y manipulación activas de ese mundo construimos nuestro conocimiento.

Pero volvamos al objeto de las matemáticas: combinación de entes extraídos del mundo exterior al sujeto pero, también, de sus acciones y operaciones. Las matemáticas se construyen aquí: acciones sobre nociones extraídas de la realidad o acciones humanas, sobre ellas mismas o sobre otras acciones y operaciones. Acciones sobre acciones: un territorio fértil para la abstracción matemática.

Con el correr de la historia humana, las matemáticas de las abstracciones, acciones y operaciones sobre ellas mismas, llegaron a ocupar su corazón: conjuntos de construcciones mentales cada vez más alejadas de lo intuitivo y empírico. Tanto que, hoy en día, a veces, nos da la impresión que nunca tuvieron contacto con ese mundo. En ese laberinto complejo de acciones y operaciones sobre acciones y operaciones u otros nuevos conceptos extraídos del mundo empírico, la lógica ocupa un lugar privilegiado. La historia de las matemáticas es, entonces, y de manera drástica, dual: no solo se refiere como en otras ciencias naturales especialmente a las situaciones socioculturales e individuales que crearon conceptos o explicaciones de un objeto físico; sino también, de manera privilegiada, a aquellas situaciones que crearon conceptos y explicaciones de otros conceptos y explicaciones: edificios que si bien empíricos en sus cimientos, en la argamasa de todo, así como en los constructores y albañiles, se elevan cada vez más "hacia el cielo". A pesar de esta elevación, por sus fundamentos empíricos (en sus nociones, métodos y artífices), se hace posible su aplicación en el mundo. En particular, nos parece que debe enfatizarse que las teorías matemáticas son aplicables en la realidad humana porque en sus edificios conceptuales las reglas de construcción no son cualesquiera (la poesía y la pintura no son matemáticas, aunque pueda que éstas sí sean poesía y pintura para el espíritu); las matemáticas refieren a operaciones y acciones precisas que se pueden asociar a manipulaciones de la realidad material o social. Tal vez el término de lógica no sea el más adecuado para referirnos al marco más general para encerrar el fundamento de estos quehaceres abstractos de las matemáticas pero, si se nos permite la imprecisión: asociamos ese término con procesos de validación de las construcciones matemáticas.

Los métodos usados por los matemáticos para validar sus construcciones teóricas no son cualesquiera. Es decir, se trata de edificios conceptuales rigurosamente pegados, con colecciones de resultados integrados por principios de deducción aceptada. Estos métodos de organización de los entes y resultados matemáticos corresponden de manera abstracta al mundo. Son formas de organización de lo real no solo originadas en (puestas por) el sujeto (como Piaget) sino, también, en el objeto mismo: formas de organización de la naturaleza, que tomamos y comprendemos en esa relación compleja entre nosotros los humanos y nuestro entorno. Esto asociado a que las nociones básicas del edificio matemático son abstraídas del contacto con el mundo, constituye una base para valorar especialmente los mecanismos de validación establecidos colectiva e históricamente por los matemáticos. Los criterios de validación de las teorías matemáticas son construcciones históricas, por lo tanto variables en el tiempo, sujetos a cambios, errores y defectos. Su progreso, sin embargo, ha sido constatable, y hoy ofrece principios muy sólidos de rigor y pertinencia que permiten asegurar resultados teóricos "confiables" aunque, evidentemente, dentro de las fronteras establecidas por el estatus epistemológico de las matemáticas. Todo esto presupone que no cualquier cosa es matemática, que no toda abstracción o construcción mental hecha por los humanos es matemática y puede, en consecuencia, corresponder, de la manera que hemos sugerido aquí, a la realidad.

Hagamos una acotación adicional en torno a este asunto: los criterios de validez lógica y coherencia deductiva en las matemáticas son extraordinariamente valiosos. Esto es un punto de partida. No obstante, como hemos visto aquí, se debe tener cuidado. Además, tampoco sugerimos que el quehacer abstracto de las matemáticas se reduce a la deducción lógica. Que se use la deducción lógica en la práctica matemática y, específicamente, que el rigor lógico sea un requisito en la comunicación de resultados entre los matemáticos , no quiere decir que las matemáticas sean reducibles a la deducción lógica. La larga experiencia del logicismo y los otros proyectos fundacionales nos confirman esta conclusión. Hemos insistido a lo largo de este trabajo en señalar como motor de las matemáticas una práctica de acciones y operaciones mentales sobre otros conjuntos de objetos, acciones y operaciones, en un doble influjo primigenio: epistemológicamente, el mundo empírico y el sujeto.

Al asumir una visión que hace de las matemáticas ciencias naturales, debemos ser coherentes y categóricos: si la matemática posee un contenido referido a la realidad material, la confrontación práctica empírica con ella es inevitable. [38] El criterio empírico debe reformularse para las matemáticas, pero no puede desaparecer. Si lo que se quiere es establecer el valor de verdad de las teorías matemáticas, en última instancia tanto las teorías altamente formalizadas como las informales deben asociarse con la realidad empírica, de una u otra forma. Aquí encontramos un factor dinámico de su desarrollo, así como las posibilidades para su valoración teórica. Es muy probable que las visiones racionalistas de las matemáticas hayan obstaculizado estas condiciones y eso haya pesado, precisamente, en el atraso teórico de resultados matemáticos vinculados más directamente al mundo. [39]

En otro orden de cosas: en la práctica matemática sólo podemos aspirar a evidenciar una "correspondencia" de sus teorías con el mundo, pero no demostrar su "no correspondencia". Esto es otra característica específica. Al igual que no se podían rechazar, en un primer momento, las geometrías no euclidianas por no obedecer a una "intuición" tradicional del espacio, todas las estructuras y teorías matemáticas pueden eventualmente "corresponder" al devenir real. Esta situación subraya el sentido de los factores históricos y sociales.

El criterio de la "correspondencia" de las teorías matemáticas con la realidad es lo que hemos estudiado en las páginas anteriores. Hemos obtenido algunas conclusiones de partida que, globalmente, apuntan a pedir la sanción empírica para las matemáticas. También hemos señalado la existencia de una diferencia cualitativa en cuanto al objeto de estudio, y a sus métodos. Ahora bien, nadie desconoce que el criterio de la correspondencia de una teoría científica con la realidad empírica si bien apropiado es extraordinariamente general; y en lo que se refiere a las matemáticas más bien resulta difícil de aplicar o, lo que es simétrico y complementario, su aplicación no revela mucho de la riqueza de sus teorías ni tampoco de la pertinencia de sus métodos de validación (por ejemplo, el peso de la validez lógica). El asunto de encontrar criterios de demarcación [40] de lo que es o no ciencia debería resolverse de una forma que permita incluir a las matemáticas; es decir, afirmar su estatus de ciencia. No se trata, sin embargo, de una discusión sancionada definitivamente en la comunidad intelectual.

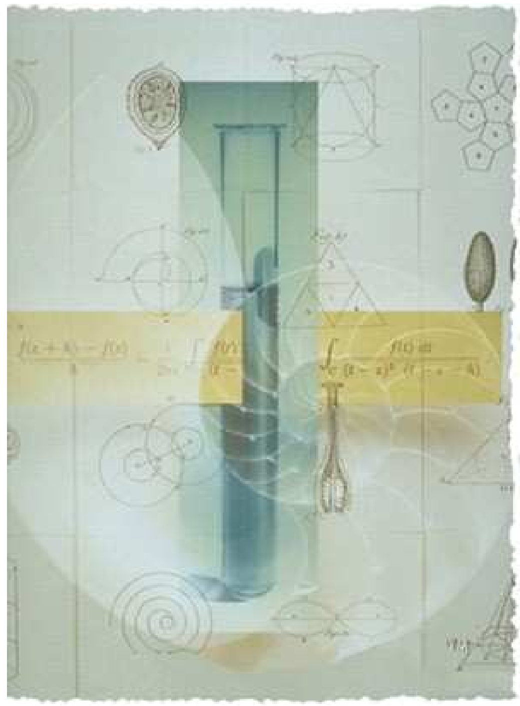
Las matemáticas como abstracciones, acciones y operaciones (precisas) sobre el mundo o sobre sí mismas, en donde esto último es determinante, permite un abanico de posibilidades para otros cuerpos del conocimiento. Nuestro punto de vista explica también la relación entre las matemáticas y las otras ciencias; una forma de decirlo: los aspectos "generales" están presentes en lo particular. Lo "general" es constitutivo de lo particular en el objeto natural. Esto explica en parte la "intervención matemática" en el conocimiento. Y no deja de resultar importante al considerar la relevancia de las matemáticas en el desarrollo científico y tecnológico: invertir en matemáticas también significa invertir indirectamente en otras dimensiones del conocimiento.

Para Kline es apasionante el acuerdo entre una disciplina cargada de múltiples deducciones abstractas y el mundo; resulta incluso paradójico. [41] Charles Sanders Peirce decía que es "inexplicable". El asunto del acuerdo de las matemáticas con el mundo no es sencillo, refiere a la naturaleza de las matemáticas; invoca consideraciones, tal vez, sobre toda la teoría del conocimiento. Por eso, no debe sorprendernos descubrir que en las principales disquisiciones, distinciones y divisiones de la epistemología moderna las matemáticas hayan ocupado tanta relevancia. Las reflexiones sobre la armonía preestablecida entre matemáticas y naturaleza han despertado la imaginación de los intelectuales. Pensadores de la talla de Einstein [42] y el mismo Hermann Weyl [43] coquetearon con la "armonía" a priori. Como hemos visto, para nosotros: la armonía existe, pero no en el alcance ni de la manera en que usualmente se afirma. No podemos dejar nuestra opinión de lado: en todo conocimiento del mundo su verdad será siempre aproximación y relatividad, incluso -como diría tajantemente Laplace- solo probabilidad.

Resumimos: las matemáticas obtienen sus nociones elementales del mundo físico que siempre interviene y las operaciones o acciones que el sujeto realiza a partir de aquellas también corresponden al mundo. Las abstracciones originales, las abstracciones " reflexivas" (que son las que señala Piaget), y todos los diferentes tipos de abstracciones (siempre más o menos subjetivas) están vinculados a la realidad. En la gestación, desarrollo y utilización de los métodos de las matemáticas el sujeto nunca deja de recibir la influencia directa del objeto. Nuestra propia naturaleza posee características generales biológicas o físicas que corresponden al resto del universo. Seguimos nuestro resumen: los resultados matemáticos no son simples generalizaciones inductivas ni tampoco son réplicas mentales impresas por el objeto en un sujeto pasivo; varios factores siempre interactúan. La aplicabilidad o la armonía de las matemáticas con el mundo no se puede explicar con énfasis unilaterales colocados ya sea en el papel del sujeto o en el del objeto. Para nosotros: en algún lugar de la relación entre ambos es que se encuentra la mejor explicación.

No se agota aquí el asunto. Esta es una veta rica para muchas más especulaciones profundas sobre el conocimiento del mundo. Pero creemos que con estas últimas líneas ya hemos expresado una parte de nuestra percepción más general sobre las matemáticas. Ahora nos parece apropiado avanzar en una precisión que responda a la pregunta: ¿cuál es el lugar de lo abstracto y lo empírico en la construcción matemática? Y, seguidamente, proceder a una primera recapitulación de las ideas para completar nuestra imagen global de las matemáticas, antes de regresar a la Educación Matemática.

IV. LO ABSTRACTO, LO EMPIRICO Y LO APLICADO



La idea de la matemática separada del mundo empírico ha penetrado tanto en la conciencia de Occidente que el término "aplicación" encierra un gigantesco equívoco teórico. Da la impresión de que se hacen matemáticas más o menos en el vacío y que, luego, por la vía del ajuste que materializa la armonía preestablecida, estos resultados se usan para explicar o incidir en la realidad práctica. Sin pretender subvalorar el papel de las abstracciones "puras" (separadas de un objeto de aplicación) debemos señalar que el desarrollo matemático funciona de una manera muy compleja y variada. Mucho de la matemática hasta nuestros días se ha desarrollado a partir de las situaciones prácticas en las técnicas, en las ciencias particulares, en la cultura, etc.. Las nociones y métodos centrales de la matemáticas han estado ligadas al devenir material y social desde las primeras etapas de la historia humana. Esto lo queremos explicar mejor.

Para nosotros: lo que existen son "situaciones matemáticas", conjunción de condiciones que engendran la construcción matemática. En éstas aparecen diversos factores e influencias: las técnicas y las ciencias normalmente llamadas físicas, la cultura, el estado del conocimiento, las necesidades lógicas y teóricas de los campos de la matemática en consideración, y también las condiciones mentales del individuo que hace matemáticas. En esto el azar interviene de una manera muy especial. Siempre la forma en que se estructuran estas influencias es un hecho concreto. Si el resultado matemático debe verse siempre como una función de varias variables evaluada en un momento preciso, ¿dónde queda la dicotomía "abstracto-empírico" y "matemática pura versus aplicadas"? En el fondo, tal vez lo mejor sea decir que no existe la separación en compartimentos estancos de la matemática "pura" y la "aplicada". En este sentido, es preferible ver a las matemáticas como un proceso único en el que ha estado siempre presente una combinación permanente de lo más abstracto con lo más ligado al mundo empírico. A veces lo predominante es una cosa, a veces la otra. Nos repetimos: el análisis debe ser siempre concreto, es decir: específico, social e histórico.

La conciencia sobre lo anterior ha estado condicionada por visiones racionalistas sobre la matemáticas. Lo típico ha sido, por ejemplo al mirar el antiguo mundo, solamente ver lo abstracto, lo axiomático, lo deductivo, lo racional, lo "puro". Como diría Bachelard: el presente ilumina el pasado; pero muchas veces se usa antojadizamente la interpretación histórica, aquella que más sirva a los modelos conceptuales del presente. Por eso pensamos que no se ha apreciado suficientemente que aunque Euclides o Arquímedes formularon sus resultados axiomática y deductivamente, estaban comprometidos en una relación íntima con el mundo material, al que querían explicar. La búsqueda de fundamento en geometría euclídea no era el deseo de una voluntad deductiva "pura" sino la búsqueda por asegurar la verdad, una descripción correcta de la realidad. Es imprescindible buscar un equilibrio en la interpretación histórica.

En los trabajos matemáticos de la Antigüedad al igual que de todas las épocas lo abstracto y lo empírico (lo "aplicado"), se sumaron combinados en una indagación del mundo. ¿Qué son por ejemplo los términos primitivos de la geometría, el plano, la recta y el punto, sino abstracciones útiles para manejar el entorno? En la mayoría de textos elementales de geometría se pierde la perspectiva: se declaran como primitivos, por definición, abstractos. Pensemos en un cuerpo sólido, un tronco, una esfera. Cortar de un golpe un sólido ofrece un plano, y a este otro golpe de cuchillo y tenemos una recta y si seguimos un tercer golpe nos da un punto . Del mundo tridimensional que constituye nuestro entorno inmediato sacamos los conceptos básicos de la geometría clásica. Si añadimos la dimensión dada por el tiempo encontramos los métodos infinitos, el tratamiento de la continuidad, propia del análisis. Podemos enfatizar los axiomas de Euclides y el rigor de la deducción dentro del edificio conceptual, esto es importante, pero también resulta importante lo otro: nunca olvidar las dimensiones prácticas, el contacto con el mundo, y el carácter humano e histórico de la construcción matemática. Un buen ejemplo son los métodos de exhausción de Eudoxo y Arquímedes, que apuntaban al cálculo de áreas; se trataba de la aproximación del área del círculo por polígonos regulares. No olvidemos cómo Arquímedes, y a manera de un signo de ese manejo de entorno, obtuvo la famosa relación de 3/2 entre los volúmenes o áreas superficiales de un cilindro circular recto y de una esfera inscrita: epitafio de su tumba, según Plutarco al contar la vida del general romano Marcelo. Y el peso relativo de los materiales, que refiere a aquella anécdota de un Arquímedes en la Siracusa de Herón, en una tina de baño y luego desnudo en carrera gritando por las calles "eureka". El formidable palimpsesto descubierto en 1906: Sobre el método, con heurística y múltiples "escaleras" empíricas, ¿acaso no nos muestra la forma de hacer matemáticas de Arquímedes? Arquímedes, padre de la física y las matemáticas más elaboradas de la Antigüedad, ¿por casualidad?

Y en la historia más reciente, en el Cálculo Diferencial e Integral: ¿podemos olvidar que Newton consideraba sus derivadas (sus fluxiones) como simples velocidades? ¿Cómo separar sus matemáticas de su mecánica, y no recordar ese monumento al pensamiento moderno publicado en 1687: Philosophiae naturalis principia mathematica? Fue Newton el padre de la física de la modernidad, de nuestra época (tanto que Voltaire lo tradujo al francés en la antesala de la Revolución Francesa).

En el siglo XVIII, Euler, el más prolífico de los matemáticos -con Cauchy- usaba la mecánica analítica, calculaba la perturbación de los cuerpos celestes en la órbita de un planeta y las trayectorias de proyectiles en medios con resistencia específica. ¿No fue Euler el mismo que estudió la propagación del sonido y la consonancia y disonancia musicales? Y fue también, lo que no se recuerda normalmente, el primer científico del XVIII que afirmó el carácter ondulatorio de la luz; además, por si faltara, estudió el movimiento de los fluidos (con ecuaciones diferenciales) y hasta lo aplicó a la circulación de la sangre. Matemáticas y mundo, de nuevo.

El gran Gauss, mientras fundaba la teoría abstracta de números y hacía progresar el cálculo y la geometría diferenciales, no cejaba en sus quehaceres en la astronomía (recuérdese su trabajo para determinar la trayectoria de Ceres) y la mecánica; precisamente, síntesis de geodesia y cartografía: Disquisitiones generales circa Superficies Curvas (1827). La vinculación con el mundo, la inspiración para su indagación y manipulación, siempre han sido parte del quehacer matemático. Y esto debe ponerse en relieve a la hora de interpretar su naturaleza.

De la misma manera, y para no dar pie a mal entendidos: las motivaciones por la abstracción y la generalización son también parte de la esencia de estas ciencias. Un magnífico ejemplo: Leibniz no usó velocidades para descubrir sus derivadas, su fundamento era lógico y algebraico. Es difícil pensar que Cantor asociara sus transfinitos al mundo. Los cuaterniones de Hamilton no eran inducciones del mundo.

¿Y las geometrías no euclídeas? Aquí tenemos un ejemplo de esa combinación extraordinaria de los influjos más abstractos y su vínculo con el mundo. Ruptura con la afirmación euclidiana de la realidad, demoledora de filosofías sobre las matemáticas (Kant), y señal de lo abstracto y puro, pero también respuesta a una forma matemática distinta de interpretar el mundo. Lo abstracto y lo empírico. El mismo Gauss consideraba que su geometría no euclidiana poseía un sentido físico. Hay modelos de las geometrías hiperbólicas que las vinculan a la euclídea: Beltrami-Klein, Poincaré. Y la geometría esférica ¿no es acaso la mejor "representación" de la geometría de Riemann? ¿Qué más real que hacer geometría en la esfera con geodésicas, meridianos, y combinación de propiedades naturales de un "mundo cuasiesférico achatado en los polos"? Y si nos vamos al espacio estelar, ya en la Relatividad de Einstein, geometrías hiperbólicas tan abstractas y "raras" son las que nos sirven para explicar el comportamiento de los rayos de luz cuando éstos se curvan por la influencia de los astros celestes.

En la construcción matemática siempre encontramos esa misteriosa combinación de lo "puro" y lo "aplicado", de lo abstracto y lo empírico. Es aquí donde se entiende bien lo que dice Von Neumann: "El hecho más vitalmente característico de la matemáticas está, en mi opinión, en su completamente peculiar relación con la ciencias naturales". [44] No se puede entender y usar la naturaleza de las matemáticas apropiadamente sin subrayar esta extraordinaria situación, cuya influencia penetra en el resto de las ciencias. Y, por supuesto, esto posee consecuencias importantes para la educación matemática y la práctica matemática en general.

La historia de las construcciones matemáticas, de sus impulsos, sus motivaciones diversas, y de su aplicación, [45] es precisamente la única historia de las matemáticas, la de carne y hueso: en la comprensión de su naturaleza, porque tantas veces se olvida, deseamos subrayar su sentido histórico, concreto, su relación con el mundo. [46]

En las anteriores secciones hemos esbozado una visión intelectual que expresa varios elementos:

• Las matemáticas deben verse como una ciencia natural pero con características específicas que obligan a reinterpretar lo que son las ciencias. Los intentos por reducir las matemáticas a colecciones sintácticas y vaciarlas de contenido empírico nos parecen infructuosos. También nos parecen equivocados los intentos que pretenden establecer un carácter trivialmente empírico para ellas. No estamos seguros de si el vocablo cuasiempírico es el más adecuado para las matemáticas: casi empíricas pero sin llegar a serlo. Sí nos parece que el vocablo ofrece un significado más vinculante al mundo, lo que sí nos resulta apropiado. Entender el concepto de ciencia natural de manera que de cabida a las matemáticas apuntala, de alguna manera, la idea de la diversidad en las ciencias. Muchas veces se han juzgado las diferentes disciplinas científicas a partir de un modelo abstracto, un rasero único (normalmente el que se atribuye a la física), cuando lo apropiado es entender y explicar las diferencias.

• Su condición de ciencia natural plantea una relación estrecha de las matemáticas y el mundo material y social. Epistemológicamente: se trata de entender una relación mutuamente condicionante entre el objeto y el sujeto. Es decir una interacción de influjos recíprocos y cambiantes. De igual manera, se plantea una relación entre las matemáticas y las otras ciencias: una íntima vinculación teórica e histórica del conocimiento científico; lo que las hace un instrumento imprescindible para el progreso de éstas.

• La naturaleza de las matemáticas, sus objetos y métodos, dejan un lugar muy amplio a la abstracción y la deducción lógica. Sus mecanismos de validación teórica obedecen a estas condiciones. No se puede negar el mayor carácter abstracto y general de las matemáticas y, por lo tanto, se debe asumir las consecuencias de esta realidad en la práctica de las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. Se establece una decisiva relación entre matemáticas y abstracción: se trata de comprender el papel especial que juegan sus dimensiones abstractas. Hemos afirmado, sin embargo, un juego combinado y diverso de lo abstracto y lo no abstracto en el devenir de las matemáticas.

• Una gran fuerza explicativa posee para nosotros la comprensión de las matemáticas en términos históricos: tanto por sus objetos como sus métodos, por sus criterios de validación, las matemáticas solo pueden ser estudiadas como construcciones sociales colocadas en contextos históricos precisos. Son comunidades humanas, con sus vicios y virtudes, las que generan el conocimiento matemático. No olvidar esta dimensión es esencial para la práctica matemática pero para la educación matemática es más que eso: es determinante . Las matemáticas si bien deben verse con base en su especificidad no por ello deben alejarse de la cultura general. Una actitud adecuada en este terreno permitiría comprender las matemáticas de una manera más amplia y enriquecedora.

Hemos incursionado en los asuntos más generales sobre las matemáticas: su naturaleza última. Decidirse a adoptar una posición unívoca definitiva sobre esto no es fácil. Y no es lo que queremos provocar aquí. Hemos tratado más bien de apenas indicar varias de las más importantes dimensiones de este quehacer intelectual cuya comprensión, sin embargo, posee serias implicaciones sobre sí mismo; en especial con relación a la educación matemática, que hemos colocado de manera relevante en este trabajo. Reflexionar en torno a la pregunta ¿qué son las matemáticas? nos dio una perspectiva general de la disciplina. Sin embargo, si nos interesa su enseñanza-aprendizaje debemos añadir otras preguntas más precisas: ¿cómo se aprenden las matemáticas?, ¿recibe el estudiante las matemáticas directamente de su entorno?, ¿serán las condiciones socioculturales las que deciden su aprendizaje?, ¿cuál es el papel de su experiencia individual?, o acaso: ¿descubre el alumno conocimiento que ya está en su mente por razones biológicas o espirituales?, ¿será la experiencia individual una simple escalera para redescubrimientos cognoscitivos de su interior y, por lo tanto, ésta resulta superflua? Las respuestas a estas preguntas definen asuntos tan específicos como el papel en el aprendizaje de la clase, la función del maestro, la actitud de los estudiantes, el valor de los textos y los materiales didácticos, en fin: los ejes de la experiencia educativa.

En lo que sigue debe asumirse explícitamente algo que a veces se ha olvidado: el ¿cómo se aprende? es el fundamento del ¿cómo se enseña? Por más importancia que se atribuya a las acciones de enseñanza, en la base es necesario colocar el aprendizaje. Esto representa un punto de partida y una óptica decisiva para la educación matemática: el estudiante como el objeto y referencia fundamentales. Este es, entonces, el momento de continuar con nuestra discusión de las tendencias modernas en la educación matemática y señalar una dirección capaz de fecundar el progreso de las matemáticas en el país.

V. MATEMATICAS: APRENDER Y ENSEÑAR

En los años ochenta dos corrientes epistemológicas dominaron la comunidad de educadores de las matemáticas: el constructivismo y la perspectiva sociocultural (el " socioculturalismo "). Las diferencias entre los términos no son meras sutilezas lingüísticas sino que obedecen a dos enfoques diferentes. Por un lado, para el constructivismo clásico la experiencia de aprendizaje se realiza en un proceso en el que se enfatiza la acción del sujeto, en una experiencia eminentemente personal. En la segunda aproximación el énfasis se pone más bien en el influjo de la cultura, el medio social en el que se realiza la experiencia educativa.

La primera visión se sitúa en la tradición piagetiana, en la que el sujeto construye el conocimiento como un proceso de adecuación y adaptación al mundo circundante en una experiencia individual. Pero pongamos esta discusión en la perspectiva epistemológica más general. Recapitulemos asuntos que tratamos en las secciones anteriores. En el empirismo clásico el sujeto era como una placa de cera sobre la que el objeto puede imprimir sus huellas. En el apriorismo kantiano las cosas cambian: el sujeto es el factor activo en algo que llamó conocimiento sintético a priori . En Piaget: el sujeto es el factor activo. Para Piaget existe una "abstracción reflexiva" [47], que define como una generalización operatoria [48]. Es esta clase de abstracción la que le permite proponer etapas mentales definidas por medio de estructuras mentales. [49] Este asunto de las etapas es uno de los temas más conocidos sobre sus ideas espistemológicas. Para Piaget, las acciones del sujeto y no del objeto son las claves. El objeto posee un rol secundario: ofrecer circunstancias sobre las que el sujeto interviene. En este mundo teórico el sujeto posee puede coordinar y combinar sus acciones. ¿Qué crea el conocimiento matemático? Su respuesta es inequívoca: la acción y operación mentales. ¿De dónde proviene esta posibilidad del sujeto? Recuérdese: se trata de una hipótesis biológica. [50] Piaget involucra factores no solamente mentales en la construcción matemática: la biología. En esto se distancia de Kant. Sin embargo, ya lo mencionamos, hay dos aspectos que aparecen subestimados: el papel del objeto físico y el rol de lo social. Precisamente sobre este tipo de asuntos es donde se va a colocar la principal discusión dentro de la comunidad internacional de educación matemática. Más recientemente las principales definiciones de esta visión han sido condensadas, por ejemplo, por von Glaserfeld en varios estudios seminales publicados en 1984 [51], 1987 [52] y 1989. [53]

En la visión sociocultural se asume un individuo que está inmerso en un medio social y cultural que es decisivo para la práctica educativa, que influencia y determina hasta cierto punto las condiciones de esa práctica. Es claro que una de las tradiciones ideológicas y filosóficas que más ha puesto en relevancia el papel de lo social y cultural en el conocimiento es el marxismo. Para el marxismo la ciencia y el conocimiento deben estudiarse como fenómenos sociales, y las condiciones sociales (normalmente las macrovariables) terminan determinando el curso de la práctica científica. Por ejemplo, en la disciplina de la Historia de la Ciencia fueron intelectuales de corte marxista los que más influencia tuvieron en las primeras fases del llamado Externalismo en los años 30. Por eso no resulta extraño que muchas ideas que se han usado en esta corriente socioculturalista en la reciente educación matemática posean la influencia del soviético Vygotsky así como de otros teóricos (como V. V. Davydov [54], A. N. Leontev [55], y Galperin [56]).

Las implicaciones de ambas visiones epistemológicas sobre la enseñanza son muy grandes, y aunque no se puede decir que exista una correlación mecánica entre una visión epistemológica y una acción educativa precisa, muchas consideraciones en la educación manifiestan este tipo de influencias.

Para que se tenga una idea de las diferencias en la pedagogía propiamente, se puede mencionar que los constructivistas brindan una gran importancia a la actividad sensorial y motora del individuo y a la actividad propiamente conceptual. Para el socioculturalismo la relevancia se coloca en la participación en prácticas culturalmente organizadas. Vygostky es radical: "... la dimensión social de la conciencia está primero en tiempo y realidad. La dimensión individual de la conciencia es secundaria y deducida." [57] En ese sentido para el constructivista el foco de su atención es cómo se constituye en conocimiento en el individuo (sus procesos, etapas, etc.), en el socioculturalismo su objeto de estudio es el individuo en su accionar social. En este último caso lo decisivo es explicar cómo la participación en interacciones sociales afecta el desarrollo psicológico o cognoscitivo. El aprendizaje entonces se sitúa en una coparticipación en prácticas culturales. Entonces: el foco al que se dirige la atención son los compromisos o lazos sociales que hacen que el estudiante se vincule a las actividades del experto (el maestro) y no los procesos cognoscitivos y las estructuras mentales involucradas. Obsérvese que esto posee implicaciones básicas sobre la práctica educativa.

En la tradición piagetiana, como en Glaserfeld, el mismo concepto de conocimiento y el de verdad tienen un sentido muy peculiares. El conocimiento es visto a través de las nociones de asimilación y acomodamiento, y el de viabilidad. Alejándose de las aproximaciones más difundidas sobre la noción de verdad, los piagetianos consideran la verdad en una relación que permite la efectividad y la viabilidad de un objetivo. Algo así como que las nociones, o proposiciones, son verdaderas en cuanto constituyen elementos viables para la organización de la actividad del sujeto. En este esquema el desarrollo del conocimiento se da a través de perturbaciones que sufre el sujeto epistémico con relación a un objetivo o propósito. El sujeto reorganiza su actividad para eliminar la perturbación y con ello obtiene o, más bien, genera su conocimiento. [58]

Ahora bien, los constructivistas más importantes no dejan de otorgar importancia a la experiencia de la clase. Todo lo contrario. La autoorganización por el sujeto que permite el aprendizaje, la construcción cognoscitiva, se da cuando los individuos interactúan con otros miembros de su comunidad . Por eso von Glaserfeld dice con relación al conocimiento: "la fuente más frecuente de perturbaciones para el desarrollo cognoscitivo del sujeto es la interacción con otros". [59] El asunto se vuelve aún más claro en Bauersfeld: la comunicación como un proceso de mutua adaptación donde los individuos "negocian significados modificando continuamente sus interpretaciones". [60] Este autor se distancia un poco del enfoque más individualista de Glaserfeld y, siempre en el esquema constructivista, reafirma la microcultura o comunidad con la interacción entre los estudiantes y su maestro. Bauersfeld lo dice claro:

"... participar en los procesos de una clase de matemáticas es participar en una cultura de matematización. Las diferentes destrezas, que un observador puede identificar y tomar como la principal realización de la cultura, forma solamente la superficie de procedimientos. Estos son los ladrillos del edificio, pero el diseño de la casa de la matematización se procesa en otro nivel. Al igual que con la cultura, el centro de que se aprende a través de la participación es cuándo y cómo hacerlo... El nudo central de la "enculturalización" matemática se realiza en un meta-nivel y es "aprendido" indirectamente". [61]

Esta cita expresa que hay conocimiento que se aprende de manera indirecta y que las perturbaciones significativas para el aprendizaje no son solamente las que ocurren en la experiencia directa del sujeto. Claramente hay referencia a la necesidad de procesos de negociación entre estudiantes y maestro (normalmente implícitas) que van de una manera llena de detalles permitiendo el aprendizaje. Se trata de un reconocimiento importante de la existencia de construcciones socioculturales, históricas, que han sido adquiridas y desarrolladas por la humanidad y que son trasmitidas al sujeto (a los estudiantes) en la práctica educativa.

Bauersfeld coloca su atención en una clase como una microcultura , en la que se da la negociación interactiva y el aprendizaje; pero, sin embargo, no apunta tanto hacia las prácticas matemáticas que la sociedad o la cultura han adoptado o creado. Es decir, los métodos, el lenguaje, los medios, y los fines, que ha construido la sociedad humana en las matemáticas no constituye el objetivo que enfatiza Bauersfeld. Estos otros asuntos son los que resultan de mayor interés para los socioculturalistas.

La posición de Vygotsky es muy radical en cuanto a la preeminencia de lo social:

“... toda alta función mental fue externa y social antes de ser interna. Fue primero una relación social entre dos personas. Podemos formular la ley general de la genética del desarrollo cultural en la siguiente manera. Toda función aparece dos veces o en dos planos... Aparece primero entre personas como una categoría intermental, y después dentro del niño como una categoría intramental”. [62]

Un constructivista "ortodoxo" no podría, de primera entrada, estar de acuerdo con esto porque se establece un paso de algo en la dimensión social a la individual y se interiorizaría lo que es externo (que no es parte de su estructura y de sus condiciones mentales) en la mente del niño. El constructivista ortodoxo tiene dificultades para aceptar la importancia de un factor externo a la evolución psicobiológica y la experiencia directa del sujeto.

Para nosotros, en realidad, el aprendizaje no es un proceso que se pueda realizar al margen de la interacción social y, más que eso, por más construcción interna que realice el sujeto, se trata, en lo que se refiere a la mayoría del conocimiento, de un proceso de apropiación de lo que ha sido elaborado social y culturalmente (por otros). Si bien, por ejemplo, la predisposición para el lenguaje o el pensamiento matemático viene en forma genética y hereditaria, también es cierto que el medio social y el influjo cultural son indispensables para el aprendizaje.

La aproximación de Vygotsky y sus seguidores, por otro lado, desestima lo que a esta altura de la investigación epistemológica parece un hecho: que los niños pequeños manejan un conocimiento importante del mundo circundante antes de que hayan sufrido una influencia significativa de la sociedad o la cultura establecidas [63] y, de la misma manera, que existe bastante evidencia de que los seres humanos vienen al mundo con potenciales para la conceptualización numérica y de la realidad física como si existiera una “preprogramación”. [64] Es decir, existen condiciones biológicas que permiten una relación cognoscitiva con el entorno y que esta relación se da en un marco social, con lo que la evolución psicológica y la social se interrelacionan en una forma muy estrecha, inseparable. Pero, además, no se puede considerar que una noción se vuelve intramental (como se desprende de la posición de Vygotsky) en un sujeto al margen de medios precisos, o simplemente por la mera existencia de la categoría de lo social. La interacción de los sujetos y su apropiación mental en su experiencia individual es lo que hace posible esa internalización cognoscitiva. Es necesaria una construcción o mejor aún una reconstrucción por el sujeto.

En general, ambas posiciones poseen un origen epistemológico que favorece alguno de los extremos de la relación epistemológica central: sujeto-objeto. En el caso de los constructivistas se favorece el papel del sujeto epistémico con lo que empuja hacia considerar como lo relevante la evolución psicogenética y la experiencia individual. En el caso de los socioculturalistas, no se enfatiza el sujeto pero tampoco el objeto tradicional (como en el empirismo clásico). El énfasis recae en la sociedad, en la dimensión social de la existencia. Esto es claro que posee influencia del pensamiento marxista, que establece una especie de lamarckismo social en la que la dimensión social determina todo.

En la epistemología alternativa que sugerimos en secciones anteriores hemos afirmado la conveniencia de considerar 3 extremos epistemológicos en lugar de dos (tres factores funcionalmente importantes): el sujeto, la sociedad (marco social), y el objeto material. Para nosotros el conocimiento es resultado de una síntesis dialéctica del movimiento de estos tres factores en una relación-proporción de influencias de difícil precisión cuantitativa. Es decir, el “porcentaje de influencia” o “determinación de cada factor en el “output” cognoscitivo es difícil de establecer e, incluso, no existe todavía suficiente evidencia científica para tener criterios definitivos. Pero recordemos nuestro punto. El sujeto epistémico, cuyas determinaciones de base se encuentran en lo biológico y lo físico, es activo. Pero esto es así en una relación con el objeto material también dinámico y activo (aunque no de la misma forma). Ambos factores son activos de maneras diferentes y condiciones, incluso temporales, distintas. Los movimientos autónomos de cada uno intervienen en el otro. La resultante sólo se puede aprehender en la relación conjunta. Esta relación epistemológica es en sí una realidad incluso material diferente a cada uno de los constituyentes. [65] Esto es decisivo. La relación adquiere un sentido especial al sumergirse en el contexto social (en las relaciones entre los hombres, la cultura, etc.). Este “contexto” influye en el movimiento del sujeto y, a veces, incluso modifica la realidad del objeto. La referencia a lo social como factor epistemológico implica de una manera más precisa una referencia a la historia misma, le da una dimensión histórica a los procesos del conocimiento.

Este es un punto de partida metodológico que se puede aplicar a todo el conocimiento, pero de una manera diferente en cada caso: el peso de cada factor es diferente con relación a cada sector del conocimiento considerado. Esto reitera nuestro llamado al análisis epistemológico concreto. De hecho, es posible pensar en el diseño de programas de investigación epistemológicos (que incluyan una interdisciplinariedad adecuada) que busquen dar cuenta de las proporciones de influencia en cada parte del conocimiento de sus factores constitutivos. Sería posible entonces afirmar diversas hipótesis y contrastarlas (o, con Popper, falsarlas) con la experiencia.

La consideración del papel de estos tres factores epistemológicos en la determinación del conocimiento matemático posee importantes consecuencias en la concepción de la práctica educativa. Si el objeto y lo social aparecen como factores activos, las etapas de Piaget en psicogénesis, por ejemplo, se deben relativizar: la evolución psicogenética se ve afectada por las características del objeto y la sociedad. Ni la sucesión de etapas y estructuras mentales ni la cronología piagetiana estarían libres de la multiplicidad de influencias de lo social y lo externo al sujeto. Un proceso de estímulo continuo en la educación desde los primeros meses puede provocar resultados gigantescos en la evolución de la inteligencia y las capacidades individuales. El sujeto puede ver su desarrollo mental incluso físico (su propio cerebro) profundamente afectado por el estímulo externo y social. Algunas aproximaciones sobre la enseñanza-aprendizaje que la pretenden determinar con base en rígidas etapas y que, en ocasiones, han tratado de justificar sus puntos de vista con ideas de Piaget, deberían ser profundamente cuestionadas.

En síntesis: no se trata de elevar uno de los extremos por encima de los otros (como en las dos corrientes reseñadas aquí) y explicar de esa manera la evolución del conocimiento. La mejor aproximación es no establecer leyes a priori ni universales y buscar cuánto influencia cada uno de los factores en la construcción del conocimiento de manera concreta. Está claro que el sujeto es central, que el objeto crea el marco más global en el que realizamos la práctica cognoscitiva y que éste se da, además, en unidades sociales. ¿Cuál es el papel de cada factor? Esto es algo que deberíamos dejarlo a la investigación específica, porque depende de muchas cosas. Por ejemplo, del área del conocimiento de que se trate, del momento histórico, de las mismas condiciones sociales, de lo que se conceptúe por conocimiento (porque es mejor ver el asunto como diferentes niveles, dimensiones o formas de conocimiento, mejor que toda esta acción humana reducida a una noción).

En nuestra visión se fomenta los aspectos constructivos de las nociones matemáticas y las relaciones recíprocas entre el sujeto y el objeto epistemológicos; se enfatiza los aspectos intuitivos, los procesos más que los resultados acabados y las relaciones con el entorno social y físico; y en la cual las proposiciones de las matemáticas ya no se ven como verdades intemporales , ahistóricas , absolutas e infalibles . En esta visión la heurística, la prueba y el error son parte de las matemáticas al igual que sucede en las otras partes del conocimiento, y obligadamente se debe contextualizar social e históricamente las matemáticas y su enseñanza.

Es interesante señalar que, precisamente, ya en los últimos años y de cara al nuevo milenio, por razones que convendría explicar en otra parte, crece una tendencia en la comunidad internacional de educadores de las matemáticas a buscar un plano de convergencia entre las dos principales tendencias metodológicas en la epistemología de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Más son los constructivistas que acuden a la presencia de lo social y más los socioculturalistas que aceptan la participación activa del individuo en los procesos cognoscitivos. Y en las filas del constructivismo se llega a afirmar que el individuo (en su accionar) no solo construye las nociones como autoorganización sino que, también, las recibe por el influjo del maestro y del entorno en el que se desarrolla la práctica educativa: no hay solo autoconstrucción cognoscitiva sino, también, influjo social y cultural. [66] Existe una dirección hacia una visión más integrada de la dimensión activa del sujeto, la acción de los social y cultural y del objeto material externo en el conocimiento y el aprendizaje.

Las implicaciones de esta situación epistemológica para la práctica educativa pueden ser muchas. Una de ellas es que el maestro no solo debe crear (y dirigir) las condiciones para la construcción cognoscitiva y el aprendizaje y dejar el estudiante un poco suelto (como haría el constructivista típico), sino que, además, es un comunicador de construcciones sociales y culturales que por su concurso penetran en la experiencia del estudiante. El maestro debe también permear al estudiante en torno a las prácticas matemáticas establecidas socialmente. Debe, por ejemplo, transmitir lenguaje, nociones, métodos, aceptados por la comunidad matemática. Sin embargo, si se reduce a trasmitir estas construcciones sociales sin que el estudiante las pueda hacer suyas, apropiárselas cognoscitivamente, no se logra la negociación (o esta ha sido mal hecha) y, por lo tanto, no se genera el aprendizaje. La participación activa del estudiante es lo que establece la ecuación educativa básica. Debe haber apropiación por el estudiante de lo que el maestro comunica y, también, debe haber construcción por el estudiante, interiorización y acomodación en la conciencia del sujeto.

En ambos enfoques se está llegando a una “negociación” que permite, si se quiere, definir lo que son las perspectivas principales de la educación matemática. Los énfasis e intereses de los constructivistas se puede acomodar con los de los socioculturalistas en un fundamento más dinámico, menos ortodoxo y más flexible. Este es el marco teórico de la educación matemática del futuro.

Podríamos resumir algunas de las principales características que encuentran consenso:

- el papel de la clase como centro de la actividad educativa;
- el estudiante como constructor activo de su conocimiento, es decir el aprendizaje como una forma de reconstrucción individual que hace referencia a la experiencia individual y a las condiciones personales del sujeto, pero en interrelación activa con los otros estudiantes y el maestro;
- el papel del maestro no solo como facilitador sino también como comunicador de construcciones socioculturales;
- la clase como centro de la negociación entre estudiantes, entre estudiantes y maestro.

En lo que sigue vamos a ver con mayor detalle algunas de las implicaciones del marco teórico que hemos reseñado.

LAS "SITUACIONES-PROBLEMA"

Si, como en el constructivismo, se afirman métodos activos y activo-operativos y la acción del sujeto es prioritaria en la generación de los conceptos, éstos deben servir para la solución de situaciones (abstractas o no). El sujeto construye un concepto "nuevo" por medio de un proceso complejo que parte de un conflicto "cognoscitivo" entre las concepciones que posee originalmente el sujeto y el que va a resultar de la experiencia cognoscitiva. Resulta en esto importante entender que el aprendizaje no debe verse con la dirección típica de la educación programada: de lo simple a lo complejo; más bien es al revés: de lo complejo a lo simple. Bien señala Bouvier: es "la complejidad lo que confiere significado". Si las situaciones son demasiado simples", se convierten en obstáculos al provocar acciones automáticas y poco creativas: "Debemos entrenar a nuestros alumnos en la resolución de problemas y en el análisis crítico de situaciones complejas que no se presten fácilmente a tratamientos automáticos". Una opinión categórica sobre esto es la de Labinowicz:

"cuando el aprendizaje se desmenuza en pasos minúsculos se niega a los niños el derecho a equivocarse, se está rechazando su capacidad para construir su comprensión propia y, al negar la complejidad de las ideas, se está dando un sentido trivial a la misma matemática".

Por supuesto que jamás debe interpretarse este asunto como que se trata de hacer las cosas difíciles. Subrayemos que complejidad y dificultad no son sinónimos. Lo que debe entenderse bien es que una situación compleja empuja a un contexto diferente al de una trivial, supone estrategias distintas en la clase. Se abre la posibilidad de promover el pensamiento crítico, creativo y la imaginación cuando inteligentemente se da la posibilidad de enfrentarse a las situaciones problema con estrategias variadas. Son inapropiados los esquemas que afirman una sola estrategia; es esencial abrir el camino para que se intenten varios procedimientos. Si se prescribe, sugiere, recomienda, guía, métodos antes de la experiencia directa del alumno, se debilita considerablemente ese espacio de libertad decisivo para la acción y el involucramiento profundo del estudiante.

LA CLASE COMO UNA COMUNIDAD CIENTÍFICA: EN RUPTURA CON EL CONDUCTISMO

El alumno debe construir su propio aprendizaje. La clase, vista como una pequeña "comunidad científica" dotada de sus reglas, es el corazón de la experiencia educativa. Aquí es donde el alumno se enfrenta a los "problemas" y construye o, mejor dicho, reconstruye conceptos. El alumno es activo, aunque también el maestro. Es necesario romper con los esquemas tradicionales en lo que el profesor dicta sin real interacción con el alumno, romper con la pasividad del alumno. No es que un profesor no participa "porque el niño puede construir el conocimiento solo". Es quien debe suministrar las situaciones adecuadas (los problemas), organizar las discusiones y apenas sugerir procedimientos de validación para el nuevo conocimiento. Si se nos permite una comparación, es como un director de orquesta.

La conclusión se puede plantear drásticamente: se rompe con el esquema de la enseñanza programada . El valor de la experiencia de la clase, los papeles del maestro y el alumno y, por supuesto, el sentido de los textos son todos diferentes. En el conductismo el aprendizaje era como una caja negra que subraya la relación entre estímulos (input) con respuestas (output), sin importar las variables intermedias; es decir, ese gran territorio de lo que ocurre dentro de la caja, que sí es lo importante. Nadie mejor que Skinner para definir esa estrategia: "... el estudiante tiene que ir por una serie de pasos" que "deben ser tan pequeños que siempre pueden darse sin mayor dificultad". Para nosotros la historia es otra: estas programaciones no solo no generan estímulos apropiados para el aprendizaje sino que, además, son auténticos límites para la acción en la clase y para el progreso crítico del alumno (se olvida de la interactividad en la clase, de la experiencia de la validación colectiva, de la búsqueda de varias estrategias). ¿Qué se puede decir de la educación programada? En síntesis: provoca estudiantes poco críticos, poco creativos, sin imaginación, sin formación para enfrentar la complejidad de la realidad. El constructivismo , la enseñanza heurística , el socioculturalismo y el mismo fenomenalismo de Freudenthal han sido fuertes críticos de la enseñanza conductista que comenzó en los años cincuenta (aunque muchos no salen de ella todavía), y fomentan un contexto dinámico vinculado sobre todo a la escuela Gestalt en el territorio de la epistemología y psicología.

ERRORES, SITUACIONES "SIN SOLUCIÓN" Y DIVERSIDAD DE ESTRATEGIAS

Tres asuntos se han vuelto relevantes en el nuevo marco teórico de la educación matemática: el uso de los "errores", los problemas sin solución con los datos y condiciones (la información) que se han suministrado, y la diversidad de estrategias. El uso del "error" es importante para lograr reducir la imagen de las matemáticas como verdades absolutas, infalibles, "exactas" y el psicosocial miedo a equivocarse. También genera una mejor asimilación de las operaciones y propiedades matemáticas: límites, espacios de aplicación. Los problemas "sin solución" favorecen una lectura crítica de los enunciados y problemas. Esto parte de la vida real: no siempre es posible encontrar la aplicación de procedimientos matemáticos. No siempre se trata de hacer una operación y un cálculo, y obtener un resultado. Más aun, es al revés: se trata de discernir cuándo es o no posible. Las situaciones en las que el "error" y la "no solución" son posibles, son muy ricas para el pensamiento creativo y la mejor asimilación de las matemáticas y sus instrumentos.

El enfrentar situaciones reales que suponen estrategias varias de matemáticas, lógica, de lectura cuidadosa e incluso sentido común son muy valiosas: experiencias cercanas a la vida real y cotidiana. La llamada contextualización de las matemáticas juega un papel especial. No se trata de simplemente "revestir de entorno" una operación, es más complejo y estimulante: enfrentar una realidad, hacer un tratamiento de la información , determinar los límites y los métodos matemáticos para abordar la situación. Aquí se han dado muchos equívocos: no se trata de colocar la operación 8

+ 15 como 8 naranjas más 15 naranjas para visualizarla o darle contenido real; eso sería un disparate. De lo que se trata es de ofrecer al estudiante una situación-problema que le permita usar su mente de manera amplia, tomando en cuenta las variables posibles y escoger los recursos e instrumentos apropiados.

EL SENTIDO DE LOS TEXTOS Y EL PAPEL DE LOS MAESTROS

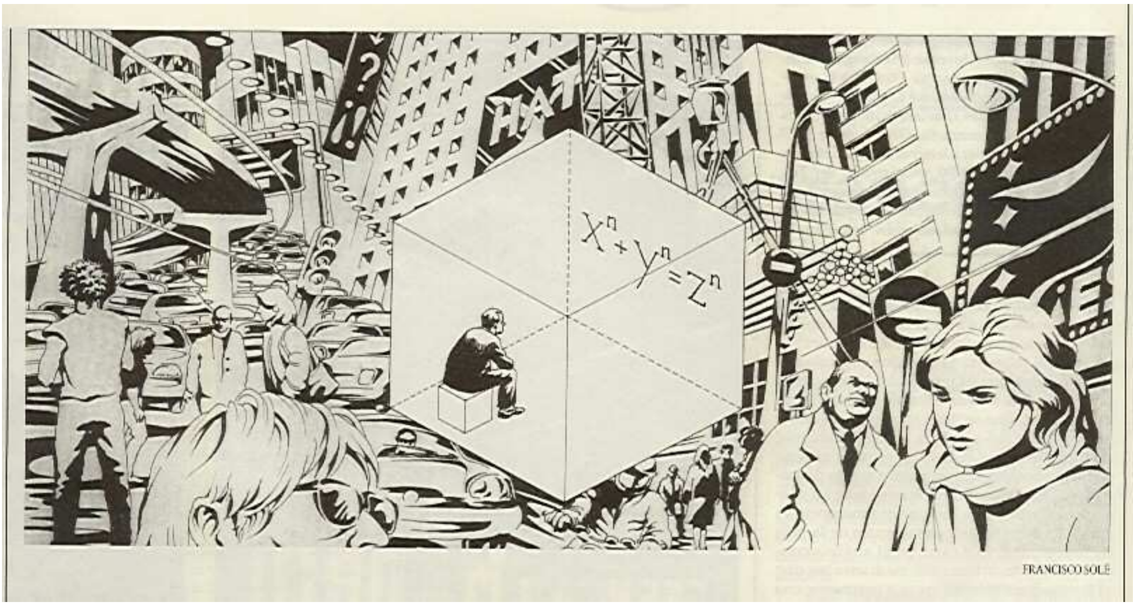
Los textos juegan un papel diferente al tradicional: insumos particulares para la clase; el lugar central para la construcción cognoscitiva por parte de los estudiantes. Debe verse como un instrumento que aporta situaciones-problema para el desarrollo de la experiencia de la clase. Un texto en sí mismo aislado de la experiencia de la clase no es suficiente para la construcción conceptual. La clase es vitalmente necesaria. Si un texto sirve a los propósitos educativos al margen de la experiencia de la clase y del maestro, entonces los propósitos educativos son otros o es otra estrategia pedagógica. De esta manera, el texto del alumno no es como una novela que se sigue con una unidad temática y discursiva. El texto ofrece situaciones que el maestro puede usar en la clase y que, con su guía directa sobre los estudiantes, provocan la construcción cognoscitiva. El papel del maestro se coloca en relieve: necesario, imprescindible. En los textos tradicionales, los "programados", el profesor puede jugar un papel pasivo, hacer que los estudiantes trabajen solos con el texto para luego comentar un poco lo que viene en el texto. En este enfoque las cosas se han llegado a plantear de tal manera que el estudiante puede faltar a clase, y encontrar en el texto todo lo que necesita "para no atrasarse". Aunque no lo digan, y muchas veces sí lo dicen, la clase es conceptuada como accesoria. En los enfoque modernos y más lúcidos: el profesor activo es central, y la experiencia de la clase es decisiva. Esto replantea el papel del maestro y de la clase, y coloca en perspectiva las posibilidades de una estrategia educativa.

Recapitulemos con visión pragmática: ¿cómo se entienden las tendencias actuales en la educación matemática con relación a la reforma de las matemáticas modernas, con aquella que iniciamos nuestro ensayo? Nuestra percepción es que, si bien se trata de planteamientos en general previos a la reforma, han sido reconceptuados dentro de una perspectiva de respuesta a la famosa reforma. Los planteamientos de la epistemología genética o de la preeminencia de los factores socioculturales son bastante previos a los años ochenta. Pero es el contexto académico que hemos retratado aquí el que captó y adaptó estas ideas en una nueva dimensión. No se afirma, salvo en algunos casos, que hacen eso, pero apuntan a la fundamentación teórica de una comunidad de profesionales que emerge realmente en los avatares derivados de esa reforma. En respuesta frente al formalismo vacío, el simbolismo innecesario, el abuso con los conjuntos, la subestimación de la geometría, el exceso de estructuras algebraicas, ahora se promueve una contestación importante: se apunta a la heurística, a la interactividad dentro de la experiencia de aprendizaje, a los recursos de la vida cotidiana y la contextualización de las matemáticas. Pero ojo: no a la ausencia de abstracción, que a veces se promueve equivocadamente, sino a la mejor asimilación y progreso de ésta en los conocimientos más generales y abstractos de la realidad.

Internacionalmente, estos planteamientos y sus consecuencias para la acción educativa matemática constituyen la principal influencia en la comunidad de educadores de las matemáticas. Con base en un enjuiciamiento lúcido, creativo, original y apropiado, este contexto teórico debe ser tomado en cuenta a la hora de definir los planes de posible progreso de la educación matemática en el país.

Hemos respondimos a varias preguntas sobre el ¿cómo se aprende las matemáticas? y, como consecuencia, hemos incidido en el ¿cómo se enseñan? Pero si nuestra vocación es práctica no nos podríamos quedar en esos planos. Nuestro siguiente interrogante nos conduce a otro asunto vital: si las perspectivas internacionales en las matemáticas plantean estas direcciones, ¿se podrán realmente impulsar en Costa Rica? La respuesta que demos es determinante: podemos esperar a que las cosas caigan por su propio peso o se desvanezcan, o bien podemos impulsar acciones enérgicas que sabemos poseen algunas posibilidades de éxito. El asunto convoca una reflexión más amplia: ¿es posible en un país empujar el desarrollo de una ciencia en una dirección determinada? o, contrariamente: ¿se trata de un disparate: "el decurso de las ciencias no se determina socialmente ni por una colectividad"? ¿Tiene sentido proponerse influenciar conscientemente las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje? Esto nos coloca de plano en una discusión más bien política e ideológica.

IV. LO IDEOLOGICO, LO POLITICO Y LO SOCIAL



De alguna manera las preguntas anteriores refieren a la problemática de si existe influencia de factores externos en el devenir de las ciencias y en esto se apunta, en particular, al valor de los estudios sobre éstas. Busquemos la perspectiva más general. La posibilidad de orientar la evolución de la ciencia en un país es afirmar la injerencia de factores externos a la ciencia y al mundo conceptual. No se puede dar sentido a la prospectiva o política científicas sin acudir a esta premisa. Es interesante mencionar que algunas de estas disquisiciones se hicieron a propósito de la disciplina de la historia de la ciencia desde hace ya bastantes años. Podemos decir que la obra de Kuhn renovó lo que se llama "externalismo" en la historia de la ciencia: una teoría metodológica muy fuerte. Evidentemente, que se admita el valor de factores externos en la evolución de la ciencia no acaba la discusión. Lo que deseamos subrayar: el fortalecimiento del externalismo tuvo implicaciones en los estudios prospectivos y la política en las ciencias. Cuando se asume que en la ciencia no intervienen elementos más allá de los propiamente conceptuales, entonces, una acción consciente de la sociedad sobre ésta resulta de partida imposible.

Vayamos a los imperativos colectivos: para países como el nuestro es imposible la ausencia de una prospectiva científica y tecnológica. Las debilidades y limitaciones en recursos empuja a la selección, centralización, y concentración con métodos y plazos de urgencia. Existe una vinculación my práctica entre prospectiva y política. No obstante, el desarrollo científico positivo duradero y de largo plazo requiere el consenso social y la flexibilidad en la comunidad científica particular; solo así sería posible una estrategia con selección de campos, métodos, sectores, plazos y objetivos. Puesto en otras palabras: sin el compromiso de las colectividades de científicos y grupos de profesionales e intelectuales libres, no es posible pensar en una dirección consciente de la evolución de la ciencia de una nación. En otro orden de cosas aunque complementariamente: existen límites a la prospectiva efectiva y a la política: la autonomía real del universo de discurso de los conceptos, de las ideas y de la práctica intelectual. La "dimensión interna" del conocimiento constituye una frontera precisa para la política y la prospectiva científicas.

Para resumir: las visiones metodológicas que unilateralmente subestiman el rol de los factores externos o, simétricamente, el de las ideas y de la lógica interna en la ciencia, son ineficaces para orientar nuestro progreso científico. Son complementariamente unilaterales. Esta discusión no es inofensiva: necesitamos lucidez, tensar recursos y esfuerzos.

Buscar una estrategia para las ciencias y proponer acciones políticas sobre las mismas invoca estudios de diferente tipo: metaciencia además de ciencia. [67] Esto es un asunto importante de esclarecer. Es cierto que la ignorancia de una disciplina impide su conocimiento y mucho menos la toma de decisiones lúcidas y pertinentes sobre ella. Este ha sido un problema común en muchas áreas académicas: por ejemplo en la educación. [68] Pero hay otro problema simétrico. Por el solo hecho de hacer ciencia no se puede garantizar que un profesional sea el más lúcido sobre el decurso de su disciplina. No estamos todavía inmunes al "barbarismo" que denunciaba Ortega y Gasset del especialista que era una auténtica bestia en el resto de la cultura. Más aún: ignorante y bárbaro sobre el desarrollo general de la disciplina a la que pertenece su campo de especialidad. Los estudios metacientíficos aunque con base en el dominio de la disciplina son campos de especialización necesaria para permitir empujar adecuadamente la ciencia. Más que adecuados son necesarios si se quiere tomar decisiones pertinentes. Esto debe tomarse en cuenta en la comunidad intelectual de un país, pues obliga a generar espacios académicos propios e independientes: estudios y profesionales en la metaciencia . Estamos de acuerdo con Kant: la historia de la ciencia es ciega sin la filosofía de la ciencia. Pero debemos añadir algo más: ciencia sin metaciencia puede ser miserable y despiadada. ¿Acaso no está la ética, para detenernos solo en esto, en el corazón de la ciencia: en sus resultados y en sus procesos? En la creación de bombas atómicas, de napalm o en la clonación ¿no hay territorio para la ética o para las perspectivas filosóficas y sociológicas? Nadie puede negar a esta altura de la historia que la política y la ideología se encuentran en cada una de las prácticas humana, en menor o mayor grado; y la ciencia no es una excepción. Pero tendríamos que decir que más que un problema epistemológico se trata de uno de naturaleza política.

¿Y en la educación? El asunto es aun más drástico. Esta convoca el plano de lo político de una manera más directa. Sus instituciones son estructuras vitales de cada nación. Afectan a todas las capas de la población de una u otra forma. Presupuestos, personas, organizaciones, recursos materiales, que son medulares para el Estado y la sociedad civil. Se trata de una cercanía mayor con la clase política y las acciones de gobierno. El asunto no es aquí la creación o incluso aplicación de conocimiento, en el que se replicarían las reglas que se dan con la ciencia, como especialmente la adopción de acciones de gobierno, tácticas o estratégicas. La conclusión es implacable: lo que se haga en la educación estará siempre en una relación directa con el contexto y la cultura políticas existentes. Por más que las instituciones educativas lograran un estatuto de mayor independencia y alguna inmunidad frente a la clase política, su importancia nacional nunca impediría el concurso de lo político e ideológico. Toda estrategia educativa o es política o no es . No es posible pensar que estos condicionantes escapen en la educación matemática. Y en la política intervienen mecanismos sociales de conducta ampliamente conocidos, que no viene el caso explicar en este trabajo. No resulta innecesario aclarar que todas las ciencias en general tampoco están ajenas a los condicionamientos políticos, ideológicos y culturales en tanto son quehaceres insertos en instituciones sociales, públicas o privadas, en lo que existen asuntos de poder y de convocatoria a decisiones colectivas. En Costa Rica, en los quehaceres científicos, normalmente encerrados en universidades o institutos independientes, la política no se escapa. Incluso, por poseer nuestras universidades públicas una organización demasiado política (común en América Latina), estos influjos pesan más que en otros sitios. Pero, la relevancia de estas dimensiones en la educación general es mucho mayor.

Muy bien: hemos aceptado que existe la influencia o que es posible influir conscientemente las ciencias y las matemáticas de un país, y más todavía la educación. Entonces, no podemos prescindir de sugerir algunos direcciones prioritarias para nuestro país. ¿Cuáles deberían ser las perspectivas prácticas de las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje en Costa Rica? En este trabajo no resulta conveniente que la óptica sea específica, más bien debe ser global. Tres consideraciones importantes para la definición de una acción matemática en Costa Rica:

• Las construcciones matemáticas a las que el país debe aspirar deben ser competitivas en la comunidad matemática mundial. Cuando la mirada se enfoca solo hacia lo local nos topamos ineludiblemente con un callejón si salida. Pero esto exige una conducta que no ha sido la típica en nuestra comunidad matemática, salvo por honrosas excepciones. La calidad de la producción matemática nacional debe medirse con los estándares establecidos en la comunidad internacional: temas, objetivos, métodos, deben someterse a los procesos de internacionalización típicos de la ciencia, que en el contexto histórico actual bañado por la globalización o la mundialización solo pueden incrementarse. Esto quiere decir que una buena parte de la agenda matemática debe definirse en términos internacionales. La participación en grupos y redes científicas internacionales, en el actual paraíso de las comunicaciones físicas o electrónicas, es un requisito para la perspectiva de cualquier comunidad científica nacional.

• La solución de problemas nacionales debe ser un objetivo a incorporar permanentemente en el desarrollo de las matemáticas. Esto invoca la aplicación consciente de la matemáticas a la realidad. Es decir, su relación estrecha con el mundo de las otras ciencias, la tecnología y la economía productiva. Esto no quiere decir, por supuesto, que haya que destinar todos los trabajos matemáticos a hacer matemáticas aplicadas de una forma mecánica, torpe. Todo lo contrario, las matemáticas llamadas "puras" deben fortalecerse. Se trata de una relación recíproca entre la construcción abstracta y la aplicada, una relación estrecha y creativa con las ingenierías, economía, con las ciencias de la salud, con la biotecnología. Visto desde otra óptica, las matemáticas "puras" juegan un papel decisivo dentro de una auténtica estrategia de desarrollo de las matemáticas. Si se concentraran todos los recursos matemáticos en la aplicación inmediata se estaría cortando las posibilidades de largo plazo. Las matemáticas más abstractas y libres de aplicación son vitales en una estrategia de largo plazo. Desestimarlas sin más solo nos conduciría a un callejón sin salida histórica. Sería añadir otros niveles de atraso. Es por eso que hemos hablado de una relación recíproca con énfasis concretos. Es claro que esta estrategia de manera precisa se puede aplicar en cada país solo sobre la base del análisis concreto. No todos los países tienen ni los mismos recursos ni las mismas posibilidades. Lo que sí es necesario señalar como regla general es la importancia de dar prioridad a ciertos campos de trabajo en las matemáticas. Existe una dialéctica entre las necesidades de diversificación y concentración que, en nuestras circunstancias, debe enfatizar el último término. Esto no se puede hacer por la vía de la imposición sino del consenso.

• Es imprescindible lograr un fortalecimiento de las condiciones matemáticas de la población. Esto implica, entonces, un mejoramiento cualitativo de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde los primeros niveles hasta los últimos. Esto debe hacerse con una aproximación educativa que corresponda mejor a las condiciones culturales y psicológicas de la población. Debe ser una enseñanza que afirme el método heurístico, lo intuitivo, lo empírico, lo contingente, lo inacabado, lo falible, lo real de las matemáticas. Esta enseñanza debe hacerse relacionada con la enseñanza de las otras ciencias y la tecnología. Y debe asumir las lecciones de la experiencia internacional y las consecuencias prácticas que la reflexión moderna ofrece: las mejores perspectivas epistemológicas y filosóficas de la actualidad deben nutrir nuestros planes en la educación matemática nacional. Hacer esto, dadas las limitaciones y obstáculos que existen, constituiría una auténtica reforma que afectaría muchos planos de la vida nacional, y los protagonistas requeridos se escaparán indudablemente de las fronteras de la misma comunidad matemática.

Probablemente sean las ciencias las que constituyan uno de los mejores espacios intelectuales y sociales para comprender la etapa histórica en la que estamos: una ruptura con la modernidad , que ha catapultado tendencias previas como la internacionalización y la globalización, así como la intensificación del conocimiento y su papel en la edificación del tejido social. Deberían ser los científicos, matemáticos y tecnólogos los profetas del nuevo orden. Más aun, su cercanía a la alta tecnología moderna, especialmente la informática y la electrónica, debería convertirlos en abanderados de su utilización. No hay que ser muy visionario para entender que en el nuevo mundo no se podrá prescindir de la comunicación permanente en redes electrónicas como Internet, de los mejores equipos de informática, telecomunicaciones, calculadoras, complejos electrónicos; que su utilización será una constante de condicionamiento y en algunos casos de definición de los quehaceres cognoscitivos. ¿Qué define mejor la nueva etapa histórica que esta auténtica revolución combinada de comunicación, informática, electrónica, ciencias, tecnologías, internacionalización, en un mundo que recién salió de la Guerra Fría? Aquí encontramos buena parte del rostro de la nueva época. Por eso esta posición privilegiada de los científicos y técnicos los ha colocado en el corazón de los procesos que empujan la potmodernidad . Sin embargo, esta realidad no ha sido suficiente para provocar la mayor lucidez y la mejor decisión entre ellos para empujar apropiadamente la "rueda de la historia", es decir en la dimensión que se requiere: más allá de la especialidad, en la cultura, la educación, las perspectivas filosóficas. No es nuestro interés en este ensayo ahondar en las razones, que son muchas, que generan esta realidad. Tampoco debe entenderse esto como un juicio universal aplicable urbi et orbe, más bien, queremos poner en relieve los imperativos: los científicos, matemáticos y técnicos poseen una decisiva responsabilidad para interpretar mejor los signos de los tiempos que vivimos y, de alguna manera, ayudar a la configuración de la realidad y el estilo nacional de desarrollo que demanda el bienestar general del país.

De alguna manera, pareciera lo más adecuado suponer que una auténtica reforma de la formación matemática, y un replanteamiento de direcciones de los quehaceres matemáticos en general, que nadie niega deberían ser un pilar para la logística científica y tecnológica del país, solo serán posibles de materializar eficazmente si participan vitalmente del escenario provocado por el nuevo estilo nacional de desarrollo, cuya configuración se encuentra en transición. Esta participación edificante dependerá mucho de la forma como asuman sus compromisos con la calidad de sus quehaceres, su contrastación dentro de los estándares internacionales, y la búsqueda, siempre un imperativo: de las vías prácticas para engendrar soluciones a los problemas del desarrollo del país. En las tres dimensiones del quehacer matemático que hemos apuntado aquí, esta perspectiva y estos compromisos constituyen, en nuestra opinión, un punto ineludible de partida.

Ya definimos planteamientos prácticos, pero el asunto exige todavía mayor concreción ¿cómo se materializa este tipo de consideraciones? En cualquiera de los escenarios históricos y culturales que nos toque vivir en los próximos años, son las comunidades intelectuales las que poseen la responsabilidad de llevar hacia delante una dirección consciente de la práctica matemática, en todas las direcciones que hemos señalado. Sus decisiones, su organización, sus estrategias, lo decidirán todo, para bien o para mal. En las matemáticas hay dos: la comunidad de matemáticos profesionales, y la comunidad de educadores de las matemáticas. Los primeros orientados hacia la creación de matemáticas puras o aplicadas para resolver problemas nacionales o no; y la segunda hacia el desarrollo de la educación matemática. No vamos en estas páginas a dirigir nuestra atención hacia la situación de la primera comunidad, en la que ha sido incluso documentada la persistencia de fraccionamientos de origen político, ideológico y profesional, que han debilitado nacionalmente su progreso: el influjo político de los años setenta bastante común a toda América Latina. Valga la pena señalar que existen componentes suficientemente desarrollados (buena "masa crítica") como para abordar la creación matemática de calidad internacional y la de modelos matemáticos apropiados para resolver problemas nacionales o regionales. Mucho aquí dependerá de la madurez y la lucidez con que estos profesionales se comporten en los siguientes años; aunque también dependerá en cierta medida del papel que las universidades públicas redefinan para realizar su misión en el nuevo orden histórico. A pesar de la relevancia de las redes internacionales para su práctica, el marco institucional local será siempre lo decisivo: si las universidades no transitan adecuadamente en el mundo postmoderno, con su cohorte de oportunidades y exigencias, poco es posible.

Nuestra preocupación central ha sido la educación matemática y los intérpretes y protagonistas de su decurso. Por eso vamos a detenernos aquí un poco más. Internacionalmente, estas dos comunidades que hemos señalado están separadas en sus objetos profesionales como en su perfil socioacadémico : publicaciones, asociaciones, reuniones, todas separadas y distintas. En ocasiones, la polémica y el antagonismo las ha distanciado aún más, no solo por la soberbia de los matemáticos profesionales (que no ha sido poca) sino por una contraposición importante de criterios profesionales. Como comunidad científica, académica, con identidad propia, y reconocida internacionalmente, la comunidad de educadores de las matemáticas es reciente. Podríamos aventurarnos a decir que se construyó en las últimas tres décadas, en especial como uno de los resultados positivos que se dio en las discusiones alrededor de la reforma de las matemáticas modernas. Volvemos al comienzo de este trabajo. El fracaso de aquella reforma planteó la necesidad de un tipo de profesional diferente al matemático universitario y, también, al educador general, quienes habían comandado la reforma menospreciando las protestas y los argumentos correctos de muchos educadores e intelectuales. La profesionalización de la educación matemática se hizo en muchas partes, debe reconocerse, en reacción frente a los matemáticos, y esto ha definido características muy precisas para su desarrollo.

En Costa Rica, para empezar por los atributos: la comunidad de educadores de las matemáticas incluye una importante legión de profesionales que enseñan en la secundaria y en las diferentes universidades; reuniones especializadas, asociaciones, revistas, olimpiadas, múltiples publicaciones dentro y fuera del país, desde hace años, demuestran su fisonomía y una creciente conciencia de su papel profesional. Esto debe tomarse en cuenta al radiografiar su realidad. No obstante, me parece conveniente, también, señalar algunas de las dificultades que deberá enfrentar en los próximos años si desea intervenir positivamente en la configuración científica del futuro nacional. Para empezar por lo más general: nunca deben olvidarse aquellos problemas derivados de la situación de la educación en el país: ausencias o limitaciones de recursos (por ejemplo, el número de profesionales graduados en las universidades es muy insuficiente), debilitamiento profesional (el estatus de los educadores decayó), ausencia de capacitaciones permanentes, falta de estímulos específicos, decaimiento, desajuste entre programas, recursos y condiciones laborales, fatiga, ausencia de mística. Esto último debe subrayarse: las sensaciones de fatiga, desconcierto e incertidumbre, escepticismo, provocados por los ajustes en el estilo nacional de desarrollo y por manejos políticos y sociales inapropiados, han engendrado una actitud pasiva en muchos de los profesionales que laboran en la educación secundaria. Es difícil pensar en el éxito de estrategias académicas, aunque sean correctas, sin una actitud positiva de la comunidad involucrada o, lo que es igual, ese estado psicosocial debe tomarse en cuenta para establecer las metas y fronteras de las acciones pertinentes. Pero estas debilidades ya las hemos mencionado antes. Su resolución dependerá del destino general de la educación nacional. Un tema delicado pero que debe tratarse con justicia: no se puede atribuir a la comunidad matemática responsabilidades que son derivadas de realidades generales de la educación y el país. Más aun: tal vez deba añadirse que precisamente por las dificultades propias de la educación matemática, por la naturaleza de la disciplina (exigencia ineludible de la abstracción, temor y rechazo a priori por los estudiantes, y "mala atmósfera" sociocultural), esas debilidades encuentran aquí varios multiplicadores. Esto a veces se pierde de vista cuando lo que se busca encontrar son "culpables".

Vayamos ahora a los problemas que son más propios de esa comunidad académica. La primera y más general: ausencia de una identidad profesional independiente desde sus primeros años de formación. No ha existido hasta nuestros días un perfil profesional propio, por lo que sus formaciones profesionales en todas las universidades se han reducido casi siempre a colecciones no integradas, separadas, inconexas, de cursos de matemáticas de menor nivel que la de los matemáticos y cursos de educación generales: integración especializada casi nula. La mayoría de especialistas en la educación matemática del país ofrecen esta deformación. Aunque debe reconocerse que en la práctica laboral misma muchos han podido autoformarse después de muchos años. La debilidad en la identidad profesional se expresa también en la casi total ausencia en las universidades de especialistas con posgrados en la educación matemática. Debe repetirse que dada la juventud de la profesionalización de la educación matemática en el mundo, no se trata de un fenómeno poco común en otros países, especialmente aquellos periféricos.

A los problemas de identidad y formación, deben sumarse los derivados de su objeto social: la educación matemática posee muchos vínculos con la educación en general, en particular con las instituciones estatales y sociales que toman las decisiones sobre este sector. Muchas de las decisiones que afectan a la educación matemática son tomadas bajo la influencia, por un lado, de vaivenes y criterios políticos (muchos de ellos inapropiados académicamente) y, por el otro lado, de criterios de profesionales no especialistas en la educación matemática, con principios pedagógicos equivocados o con una formación débil en los resultados internacionales de la disciplina.

Ahora apuntamos hacia las perspectivas de esta comunidad: con sus atributos y debilidades, será el protagonista más importante para adoptar una estrategia que tome en cuenta las tendencias actuales en la educación matemática, con acciones de formación, capacitación y recursos de apoyo para estudiantes y profesores, así como de concienciación de los padres de familia. Sin duda tomará su tiempo. No es fácil y, desde ya, vale la pena tener conciencia de las anunciadas reacciones negativas que se colocan a contrapelo de los reclamos históricos. Un nuevo enfoque cambiaría la práctica educativa de manera significativa: una decisión que gravita alrededor del futuro nacional. Por supuesto que esto no será más que un punto de partida. No hay que depositar más ilusiones de las que son absolutamente válidas. Pero ¿qué está en juego? La respuesta es tajante: la adopción visionaria de instrumentos de vanguardia que, probablemente, serán adoptados ampliamente por las naciones más lúcidas en los siguientes años. Costa Rica podría tomar una delantera es esto; posee los recursos humanos e intelectuales, y con ello lograr una ventaja que podría ser decisiva para una estrategia nacional de progreso, en un mundo crecientemente competitivo dentro del que este tipo de ventajas puede hacer la diferencia.

Volvamos a la dicotomía de las dos comunidades. En la mejor perspectiva nacional, y aunque la autoafirmación de dos comunidades intelectuales en las matemáticas sea necesaria profesionalmente, debería buscarse la mayor convergencia posible. Esto no solo lo permite el hecho que, aunque con objetivos distintos, se trata de la misma ciencia. También porque en países como el nuestro, de escasos recursos y muchas urgencias, se debe promover la concentración de esfuerzos y la mayor convergencia de acciones para nutrir las acciones que en este territorio reclama el progreso nacional. Hay una razón adicional: en buena parte de los países de América Latina ambas comunidades se crearon casi al mismo tiempo. Es el caso de Costa Rica: no había una comunidad consolidada de matemáticos profesionales antes de abrir el profesorado de matemáticas. Sus historias han sido procesos casi simultáneos. Curiosamente, la reforma de las matemáticas modernas que generó internacionalmente la profesionalización de la educación matemática y esta comunidad intelectual, fue la que ayudó a configurar la comunidad matemática nacional, con sus vicios y virtudes. Se requiere, entonces, por un lado la autoafirmación y fortalecimiento de cada comunidad y, por el otro, la colaboración, el diseño y elaboración de planes comunes. Para esto se requiere, además de planes precisos de conducta en cada comunidad, una actitud apropiada: positiva, dinámica, comprometida nacionalmente.

Al apuntar hacia las matemáticas en una perspectiva asociada al progreso de nuestra colectividad, nos hemos visto compelidos a privilegiadamente radiografiar la educación matemática, incursionar en nudos teóricos propios de la filosofía para intentar los alcances más profundos, para de nuevo volver a la formación matemática. El siguiente paso nos volvió a sacar de sus fronteras para incursionar en el fuero de la política en ciencias, matemáticas y educación, pero de nuevo regresamos a nuestro territorio de partida. En este nuevo retorno intelectual nos vimos obligados a apuntar nuestros dardos hacia las comunidades científicas y académicas, intérpretes y protagonistas necesarios de cualquier acción matemática en el país. ¿Qué conclusiones obtener de este periplo? La realidad es que éstas ya se encuentran presentes en el discurso desarrollado en estas líneas. Y abundar en ellas sería ingrato para nuestros lectores. Valga la pena simplemente decir que nuestro país se encuentra en una encrucijada histórica de rupturas, muertes y partos, de rasgos y razones que nutrieron, nutren o nutrirán otras generaciones. Se trata de una encrucijada porque estamos en la transición, donde lo viejo no muere totalmente y lo nuevo no nace por completo, todavía. No es un asunto nacional, local, es la situación del mundo. De acuerdo con Octavio Paz: nos resulta equívoco e inepto llamar a la nueva época postmoderna, ya en rigor y no solo como una forma de hablar. Pero ¿cómo dirigirnos a lo que es y no es, pero que ya determina nuestras vidas? Tal vez, deberíamos escudriñar en los pilares del nuevo orden lo más significativo para nominar el momento. Ahí no encontramos que la afirmación de la democracia, las caídas de las teorías llamadas "metahistóricas", o la ruptura del estado-nación posean la mayor fuerza. Más potente nos resulta el conocimiento, esa vigorosa realidad para interpretar y manipular el mundo, para crear valores solidarios y permanentes, que aunque contribuyó a abrir la modernidad es el fundamento de lo que sigue. No es la información lo que nos define tampoco; me repito: es el conocimiento. Si de nombres se trata sería mejor llamar la nueva época con la Edad del Conocimiento. Nuestra valoración de la época y del futuro, en consecuencia, nos obliga a colocar en posición de relieve la cultura y la educación, y dentro de ellas, con privilegio, las matemáticas y las ciencias, la tecnología sin duda. Por eso, y siempre con esta mirada en lo que sigue, es que nos hemos atrevido, tal vez con exceso de vehemencia, a escudriñar en el pasado, el presente y el futuro de las matemáticas. Puesto en otros términos: en nuestros trazos se encuentra una visión de futuro, de un futuro que, sin embargo, ya ha mordido el rico y complejo tejido de nuestro presente.

BIBLIOGRAFIA

• Ayer, A. J.: Language, Truth and Logic . London: Gollancz, 1936. Dover (New York) lo reimprimió en 1946.

• Bauersfeld / Krammheuer / Voigt: "International theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies" en el libro editado por H.G. Steiner y A. Vermandel: Foundations and methodology of the discipline of mathematics education. Antwerp, Bélgica: (Proceedings of the TME Conference), 1988.

• Bauersfeld, H: "Hidden dimensions in the so-called reality of mathematics classroom" en Educational Studies in Mathematics , 1980.

• Bauersfeld, H.: "'Language games' in the mathematics classroom: their function and their effects", en el libro editado por P. Cobb y H. Bauersfeld The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1994.

• Benacerraf, Paul / Putnam, Hilary: Philosophy of Mathematics: Selected Readings . N. J.: Prentice Hall, 1964. La segunda edición es de Cambridge University Press en 1983.

• Beth, E. W. / Pos, H. J. / Hollak, J. H. A. (editores) Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948), Vol. I, pt. 2, Amsterdam, 1948.

• Beth. E. W./ Piaget, Jean. Epistemología, Matemáticas y Psicología. Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Barcelona: Editorial Crítica, 1980.

• Brouwer, L. E. J.: "Intuitionism and Formalism", en el Bulletin of the American Mathematical Society , 20, 1913.

• Brouwer, L. E. J.: "Consciousness, Philosophy and Mathematics", en Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948), Ed. E. W. Beth, H. J. Pos y J. H. A Hollak. Vol. I, pt. 2, Amsterdam, 1948.

• Brown, J. S. / Collins, A. / Duguid, P.: "Situation cognition and the culture of learning" en Educational Researcher , 18 (1), 1989.

• Carey, S / Gelman, R.: The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1991.

• Carnap, R.: Foundations of Logic and Mathematics . Chicago: University of Chicago Press, 1939.

• Cobb, P. / Bauersfeld, H.: The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1994.

• Cobb, Paul: "Where is the mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development" en la revista Educational Researcher volumen 23, número 7, octubre de 1994.

• Curry, Haskell. Outlines of a formalist philosophy of mathematics . Amsterdam: North Holland, 1970.

• Davis, Philip / Hersh, Reuben: The Mathematical Experience , Boston: Birkhäuser, 1981.

• Davydov, V. V.: "Problems of developmental teaching" (Parte 1) en Soviet Education , 30 (8), 1988.

• Diario La Nación , San José, Costa Rica: 12 de noviembre de 1997

• Diario La Nación , San José, Costa Rica: 4 de diciembre de 1997.

• Diario La Nación , San José, Costa Rica: 1 de diciembre de 1998.

• Diario La Nación , San José, Costa Rica: 27 de noviembre de 1997.

• Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". Philosophy of Mathematics Education Newsletter 7, 1994.

• Ernest, Paul: The Philosophy of Mathematics Education . Hampshire, G.B.: The Falmer Press, 1991.

• Frege, Gottlob: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formel-sprache des reinen, Denkens. Halle, Nebert, 1879.

• Frege, Gottlob: Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. 2 vols. Jena: Pohle, 1893, 1903. Reimpreso por Hildescheim: Olms, 1966.

• Gödel, Kurt. Obras completas . Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981.

• Grattan-Guiness, I: "Not from Nowhere History and Philosophy behind Mathematical Education", en Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. Vol. 4, 1973.

• Greeno, J.G: “Number sense as situated knowing in a conceptual domain” en el Journal for research in Mathematics Education, 22, 1991.

• Hempel, C. G.: “On the Nature of Mathematical Truth”. American Mathematical Monthly 52: 543-56. Incluido en el libro editado por Benacerraf y Putnam en 1964.

• Heyting, A.: Intuitionism: An introduction . Amsterdam: North Holland, 1956.

• Hilbert, David: “Uber das Unendliche”, en. Mathematische Annalen 95 (Berlin). Hay una traducción de E. Putnam y G. J. Massey que se llamó "On the infinite" en el libro editado por Paul Benacerraf y Hilary Putnam: Philosophy of Mathematics: Selected Readings . N. J.: Prentice Hall, 1964; y por S. Bauer-Mengelberg en el libro de Jean Van Heijenoort: From Frege to Gödel . A Source Book in Mathematical Logic , 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

• Huse, T. / Postlethwaite, T. N. (Eds.): The International Encyclopedia of Education Supplementary Volume , Oxford: Pergamon Press, 1989.

• Janvier, C. (Ed.): Problems of representation in the teaching and learning of mathematics . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1987.

• Kitcher, Philip. The Nature of Mathematical Knowledge . New York: Oxford University Press, 1983.

• Kline, M.: Why Johnny Can't Add: The Failure of New Maths . London: St. James Press, 1973. Existe una versión en español: El fracaso de la matemática moderna , por Alianza Editorial, en Madrid, España.

• Kline, M .. Mathematics: the loss of certainty . New York: Oxford University Press, 1980.

• Kuntzmann, Jean: ¿Adonde va la matemática? Problemas de la enseñanza y la investigación. México: Edit. Siglo XXI, 1978.

• Lakatos, I.: Proofs and Refutations . Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

• Leontev, A. N.: “The problem of activity in Psychology”, en el libro editado por J. V. Wersch (Ed.): The concept of activity en Soviet Psychology . Armonk, N. Y.: Sharpe, 1981.

• Mehler, J. / Walker, E. C. T. / Garret, M. (Eds.): Perceptives in mental representation: Experimental and theoretical studies of cognitive processes and capacities . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1982.

• Montiel, Nancy / Ulate, Anabelle/ Peralta, Luis C. / Trejos, Juan Diego: La educación en Costa Rica: ¿un solo sistema?, San José, Costa Rica: Instituto de Investigaciones en Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica, febrero de 1997.

• Piaget, Jean: Introducción a la epistemología genética. Trad. María Teresa Carrasco-Victor Fischman. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1979.

• Piaget. Biología y conocimiento . Trad. Francisco González Aramburu. México: Siglo XXI, 1980.

• Piaget, Jean / Choquet, G. / Diedonné, J. / Thom, R. y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Editorial, 1980. Selección y prólogo de Jesús Hernández.

• Putnam, H: Philosophical Papers . Vol I: Mathematics, Matter and Method . Vol 2: Mind, Language and reality . Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

• Quine, W.V.O. Filosofía de la Lógica . Madrid : Alianza, 1977.

• Resnik, M. D.: "Mathematical Knowledge and Pattern Recognition." Canadian Journal of Philosophy 5: 25-39, 1975.

• Resnik, M. D.: "Mathematics as a Science of Patterns": Ontology. Nous 15: 529-50, 1981.

• Resnik, M. D.:" Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology". Nous 16:95-105, 1982.

• Ruiz, Angel / Barrantes, Hugo: Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos , San José, Costa Rica: Ed. UCR, 1997.

• Schoenfeld, A.H: Cognitive science and mathematics education . Hillsdate, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates,1987.

• Shapiro, S.: "Mathematics and Reality". Philosophy of Science 50: 523-48, 1983.

• Shapiro, S.: "Conservativeness and Incompleteness". Journal of Philosophy 80: 521-31, 1983.

• Spelke, E. S. "Perceptual knowledge of objects in infancy", en el libro editado por J. Mehler, E. C. T. Walker y M. Garret (Eds.): Perceptives in mental representation: Experimental and theoretical studies of cognitive processes and capacities . Hillsdale, N. J.: Erlbaum. 1982.

• Steiner, H.G. / Vermandel, A.: Foundations and methodology of the discipline of mathematics education. Antwerp, Bélgica: (Proceedings of the TME Conference), 1988.

• Steiner, M: Mathematical Knowledge . Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1975.

• Thom, René.: "Son las matemáticas modernas un error pedagógico y filosófico?, en el libro: Piaget, Jean / Choquet, G. / Diedonné, J. / Thom, R. y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza Editorial, 1980. Selección y prólogo de Jesús Hernández.

• Van Heijenoort, Jean: From Frege to Gödel . A Source Book in Mathematical Logic , 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

• Vessuri, Hebe (y otros): La ciencia periférica . Caracas: Monte Avila Editores, 1983.

• von Glaserfeld, E. (Ed.) "An introduction to radical constructivism", en el libro editado por P. Walzlawick: The invented reality .New York: Norton, 1984.

• von Glaserfeld, E. "Constructivism in Education" en la obra editada por Huse, T. y Postlethwaite, T. N. The International Encyclopedia of Education Suplementary Volume , Oxford: Pergamon Press, 1989.

• von Glaserfeld, E. "Learning as a constructive activity". En el libro editado por C. Janvier (Ed.): Problems of representation in the teaching and learning of mathematics . Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1987.

• von Glaserfeld, E: "Cognition, construction of knowledge, and teaching" en Synthese , 80, 121-140, 1989.

• Vygotsky, L. S.: "Consciousness as a problem in the psychology of behavior" en Soviet Psychology , 17, 1979.

• Vygotsky, L. S.: Razvitie vysshikh psikhicheskikh funktsii , Moscú: Akad. Ped. Nauk, 1960.

• Vygotsky, L.S: Mind and society: the development of higher mental processes. Cambridge, Boston: Harvard University Press, 1978.

• Walzlawick, P. (Ed.): The invented reality .New York: Norton, 1984.

• Wersch, J. V. (Ed.): “The concept of activity” in Soviet Psychology . Armonk, N. Y.: Sharpe, 1981.

• Wilder, Raymond: Evolution of Mathematical Concepts . New York: Wiley, 1975.

NOTAS

[1] El asunto es, si se quiere, dramático. Los promedios en las pruebas nacionales en matemáticas son los más bajos de todas las asignaturas. Véase el siguiente cuadro:

-	1995	1996	1997
Prueba de Sexto	-	65,9	64,2
Prueba de Noveno	-	46	49
Bachillerato	61,3	65	61

Fuente: La Nación , ediciones del 12 y 27 de noviembre, y 4 de diciembre de 1997.

En las pruebas de Bachillerato de 1998, matemática obtuvo 66, 4 % de promoción en los centros urbanos y 56,6% en los rurales. En las otras materias los resultados fueron mejores. Véase la siguiente tabla para comparar los resultados:

-	Urbano	Rural
Español	95,3%	96,8%
Estudios Sociales	89,6%	87,2%
Matemáticas	66,4%	56,6%
Biología	87,6%	83,9%
Física	86,1%	85,6%
Química	92,4%	93,5%
Francés	93,3%	98%
Inglés	88,8%	80,6%

Fuente: La Nación , edición del 1 de diciembre de 1998.

[2] Por ejemplo: los primeros cursos de Cálculo Diferencial e Integral en las universidades públicas es raro que superen promociones del 40 por ciento.

[3] Para una descripción de los detalles de la reducción del gasto público en la educación nacional, puede consultarse el excelente estudio: La educación en Costa Rica: ¿un solo sistema?, de Nancy Montiel, Anabelle Ulate, Luis C. Peralta y Juan Diego Trejos, Instituto de Investigaciones en Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica, febrero de 1997.

[4] Se trata de una historia muy larga. En el seno mismo de la Escuela Normal de Costa Rica ya encontramos este tipo de filosofías, y luego se filtraríán en la Universidad de Costa Rica desde sus primeros años y en la educación en general.

[5] René Thom decía "Es cierto que dentro de las matemáticas actuales, el uso del álgebra como método de demostración es sin duda importante, incluso decisivo. Pero podría ser razonable preguntarse si deben tenerse en cuenta las necesidades de los matemáticos profesionales a la hora de ocuparse de la segunda enseñanza. Los matemáticos de la generación actual, impregnados de espíritu bourbakista, tienen la tendencia sumamente natural a introducir en las enseñanzas secundaria y superior las teorías y estructuras algebraicas que tan útiles les han sido en su propio trabajo, tendencias por otra parte triunfantes en el espíritu de la matemática del tiempo. Pero habría que hacerse la pregunta de si, al menos en la enseñanza secundaria, resulta conveniente incorporar los últimos hallazgos de la técnica del momento".

[6] Por ejemplo, el gran matemático español, radicado muchos años en Argentina, Luis Santaló decía: "De las dos cuestiones esenciales, el qué enseñar y el cómo hacerlo, en la actualidad es más importante la primera".

[7] La reforma curricular de 1995 sí cambió la perspectiva de la educación matemática del país, separándose de los ideas de la reforma e introduciendo una visión constructivista hasta cierto punto para nutrir el quehacer matemático. Los alcances de esta última modificación han sido, sin embargo, limitados, tanto porque los programas nuevos adolecen de varias inconsistencias como por la dificultad de hacer efectivos los cambios en la enseñanza-aprendizaje real del país.

[8] Es éste precisamente el punto de vista que pareciera entenderse asume el británico Paul Ernest en un relativamente reciente debate con el profesor de filosofía Zheng Yuxin de Nanjin University en China: "Mi posición es que la filosofía de la educación matemática es primariamente una parte de la educación matemática. Se trata de una perspectiva sobre los problemas y asuntos de la educación matemática, pero que integra y aplica los métodos y conceptos de la filosofía". Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". Philosophy of Mathematics Education Newsletter 7 (February 1994).

[9] Consúltese: Kline, Morris. Mathematics. the loss of Certainty . New York: Oxford University Press, 1980. p.15.

[10] Se trataba de una "trascendencia", en Pitágoras poseía un sentido de "inmanencia".

[11] Para algunos, la filosofía de las matemáticas arranca con Frege. Esta es una posición muy drástica y distorsionada acerca del quehacer filosófico sobre las matemáticas.

[12] Puede consultarse: Curry, Haskell. Outlines of a formalist philosophy of mathematics . Amsterdam: North Holland, 1970.

[13] Por ejemplo, rechazaban la prueba suministrada por Cantor de que los números reales son no numerables .

[14] Es decir no aceptaban las pruebas "por contradicción" tan típicas de las matemáticas clásicas.

[15] Un trabajo seminal de Brouwer en 1913: "Intuitionism and Formalism", en el Bulletin of the American Mathematical Society , 20, pp. 81-96. Y también: Consciousness, Philosophy and Mathematics, en Proceedings of the Tenth International Congress of Philosophy (Amsterdam, 1948), Ed. E. W. Beth, H. J. Pos y J. H. A Hollak. Vol. I, pt. 2, Amsterdam.

[16] Puede verse de Heyting: Intuitionism: An introduction . Amsterdam: North Holland, 1956.

[17] La teoría de los infinitesimales cuyo origen a veces se asocian a Leibniz ha tenido una historia apasionante hasta nuestros días. Algunos autores (como Lakatos) consideran una tensión de teorías: infinitesimales (por un lado) y los enfoques de Weierstrass (dominantes en la comunidad matemática de la época). De hecho, la teoría de los infinitesimales, perdedora en aquella época, fue rehabilitada en el marco de lo que se llama Análisis no- Estándar desarrollado por Abraham Robinson en la década de 1960.

[18] Véase nuestro libro: A. Ruiz y Hugo Barrantes, Elementos de Cálculo Diferencial. Historia y ejercicios resueltos , San José: Ed. UCR, 1997.

[19] No debe olvidarse, sin embargo, que el enfoque que desarrollaron era histórico y social: otras ideas existieron en la época sobre la naturaleza del Cálculo y de los medios para su rigorización.

[20] Su obra solo se puede entender en ese contexto intelectual. Su trabajo fue medular para la lógica moderna. Una de sus obras más significativas en este terreno fue, en 1879: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formel-sprache des reinen, Denkens. Halle, Nebert.

[21] La referencia completa: Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. 2 vols. Jena: Pohle, 1893, 1903. Reimpreso por Hildescheim: Olms, 1966.

[22] Es decir: la matemática pura se podía expresar en sistema formales no interpretados, en estos las verdades de las matemáticas eran representadas por teoremas formales.

[23] Un trabajo clave: Uber das Unendliche. Mathematische Annalen 95 (Berlin). Hay una traducción de E. Putnam y G. J. Massey que se llamó "On the infinite" en el libro editado por Paul Benacerraf y Hilary Putnam: Philosophy of Mathematics: Selected Readings. N. J.: Prentice Hall, 1964; y por S. Bauer-Mengelberg en el libro de Jean Van Heijenoort: From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

[24] En 1931, en un artículo intitulado "Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines", Gödel destruiría las aspiraciones de los formalistas. En un resumen de su trabajo que apareció en la revista Erkenntnis Gödel decía: "En el trabajo anteriormente citado se muestra que no hay ningún sistema formal con un número finito de axiomas que sea completo ni siquiera respecto de las sentencia aritméticas. Aquí entendemos por "sentencias aritméticas" aquellas en que no aparecen más nociones que +, . , = (adición, multiplicación e identidad, referidas a números naturales), además de los conectores lógicos y los cuantificadores universal y existencial, aplicados solo a variables de números naturales) por lo cual en las sentencias aritméticas no aparecen más variables que las de los números naturales). Incluso para los sistemas formales con un número infinito de axiomas hay sentencias aritméticas indecidibles, con tal de que su esquema axiomático cumpla ciertas condiciones (muy generales). De lo dicho se sigue, en especial, que hay sentencias aritméticas indecidibles en todos los sistemas formales conocidos de la matemática -por ejemplo, en Principia Mathematica (con axiomas de reducibilidad , de elección y de infinitud), en la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo. Fraenkel y en la de Von Neumann, y en los sistemas formales de la escuela de Hilbert. Gödel, Kurt. Obras completas . Trad. Jesús Mosterín. Madrid: Alianza Editorial, 1981, p. 476.

[25] Varias replanteos a esta visión se hicieron en los años siguientes debido a importantes señalamientos de filósofos como Quine (1936, en 1953 y en 1962). Quine concluyó en una forma propia de platonismo muy similar al del Frege original: la matemática se refiere a conjuntos y números. Durante los años 50 y 60, mucho de la filosofía de las matemáticas se concentró en buscar una fundamentación más por el lado de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, distanciándose de los proyectos fundacionales de principios de siglo. En los 70, si bien se dieron trabajos en la misma línea, otros buscaron un enfoque diferente, estructuralista : las matemáticas no se refieren a describir los conjuntos sino a las propiedades de estructuras matemáticas (M. D. Resnick en 1975, 1981 y 1982, también S. Shapiro en 1983). Existen neofregeanos, neoestructuralistas, etc... Muchos de estos trabajos son de un gran contenido técnico de mucho detalle y substancialmente menos de epistemología o de reflexión global sobre las matemáticas.

[26] Algunos temas y preocupaciones similares e encuentran también en trabajos de Raymond Wilder: Evolution of Mathematical Concepts . New York: Wiley, 1975. También subrayaron la importancia de argumentos no deductivos en las justificaciones matemáticas en ese mismo año: M. Steiner (Mathematical Knowledge . Ithaca, N.Y.: Cornell University Press) y H. Putnam (Philosophical Papers . Vol I: Mathematics, Matter and Method . Vol 2: Mind, Language and reality . Cambridge: Cambridge University Press).

[27] La principal influencia de Lakatos provenía de Popper quien ofrece el falibilismo como una respuesta a lo que llamó doctrinas "justificacionistas": que establecen una categoría de conocimiento como fuente de autoridad y fundamento de otras o todas las demás (como la lógica, la aritmética, etc). Una visión interesante (por el momento de escribirse) aunque no muy profunda sobre esto se puede ver en: Grattan-Guiness, I. "Not from Nowhere History and Philosophy behind Mathematical Education", en Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. Vol 4, 421-453 (1973).

[28] Su obra clásica: Davis, Philip y Hersh, Reuben: The Mathematical Experience , Boston: Birkhäuser, 1981.

[29] Su obra más sólida es: Kitcher, Philip. The Nature of Mathematical Knowledge . New York: Oxford University Press, 1983.

[30] Ernest ha desarrollado un campo particular muy dinámico en la comunidad internacional de la educación matemática: la filosofía de la educación matemática. Su obra seminal es: The Philosophy of Mathematics Education . Hampshire, G.B.: The Falmer Press, 1991.

[31] Ernest, Paul: "In response to professor Zheng". Philosophy of Mathematics Education Newsletter 7 (February 1994).

[32] Cf. Piaget. Introducción a la epistemología genética. Trad. María Teresa Carrasco-Victor Fischman. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1979.

[33] Cf. Ibid . p.64.

[34] Cf. Piaget. Biología y conocimiento . Trad. Francisco González Aramburu. México: Siglo XXI, 1980.

[35] Cf. Ibid . pp.305 ss.

[36] Cf. Kline. Op. Cit pp.332-333.

[37] Podríamos decir con Popper que las proposiciones de la ciencia son falsables , pero será necesario añadir algo más para las matemáticas.

[38] Existen partes de la matemática "obvias" (en el sentido de Quine), pero no son éstas las que determinan su esencia. Cf. Quine, W.V.O. Filosofía de la Lógica . Madrid : Alianza, 1977.

[39] Cf. Kline, M .. Mathematics: the loss of certainty . New York: Oxford University Press, 1982. En la búsqueda de la conexión entre matemáticas y realidad que hemos señalado, se vuelve necesario entender que no se trata tanto de hacer corresponder enunciados a hechos, o algo similar, sino, sobre todo, complejos estructurales, teorías, a situaciones de la realidad. El sentido estructural que, si bien no engloba todo en matemática, es un aspecto central de la conexión a la que me refiero.

[40] Un intento muy famoso para establecer la "demarcación" en ciencias fue desarrollado por el gran filósofo austríaco Karl Popper. Su respuesta hace referencia a los vocablos falsabilidad o falsación .

[41] Cf. Kline. Op. Cit. p.340.

[42] Cf. Ibid . p.346.

[43] Cf. Ibid . p. 347.

[44] Cf. Kline. Op. cit.

[45] La idea de "aplicación" como la hemos usado aquí debería desaparecer como concepto explicativo en torno a la naturaleza de las matemáticas. Tal vez sólo sirva como forma de juzgar y descubrir un fenómeno particular. Hemos querido usar la noción de aplicación algo así como Wittgenstein usó la de filosofía, es decir instrumentalmente. Una vez usada se puede eliminar. Con ello sólo queremos desterrar esa errónea visión de elaborar por un lado y luego aplicar.

[46] Tal vez tengan razón aquellos que piden desligarse de la problemática veritativa en matemáticas, y concentrarse en esa relación donde la utilidad se vuelve esencial, y solo reducir el esfuerzo a cuidar la coherencia lógica y teórica de los cuerpos matemáticos. Aquí volvemos a caer de nuevo en la discusión original. En lo que se refiere a los fundamentos de la matemática quiero ser radical: el asunto es distinto. No se puede pasar por alto la realidad de un objeto teórico en beneficio de un pragmatismo no totalmente seguro. Las consideraciones veritativas se vuelven importantes a la hora de definir los límites y la forma de considerar los problemas de la evolución de las matemáticas. Más aún, es posible encontrar una gran riqueza teórica en los intentos prácticos de fundamentación matemática; claro está no entendiéndola como el rol de brindar una base teórica absoluta e infalible sino como el de encontrar las relaciones entre sus cuerpos teóricos y otros de las ciencias en general. Aunque no lo tratamos en este trabajo, el estudio de la falsación como señalaron Popper y Lakatos, y como un proyecto hacia la correlación de las matemáticas más abstractas con las teorías y enunciados empíricos, podría representar un programa de trabajo del que pueden salir interesantes avances matemáticos y también metodológicos para la ciencia en general.

[47] Cf. Piaget, Jean. Introducción a la Epistemología Genética. Trad. María Teresa Carrasco-Víctor Fischman. Buenos Aires: Editorial Paidós, 1974. p.80 o Biología y Conocimiento. Trad. Francisco González Aramburu. México: Siglo XXI, 1980. pp 292, 293 y siguientes

[48] Cf. Piaget. Introducción a la Epistemología Genética. p.305.

[49] Cf. Beth. E. W./ Piaget, Jean. Epistemología, Matemáticas y Psicología. Trad. Víctor Sánchez de Zavala. Barcelona: Editorial Crítica, 1980. p 209.

[50] Cf. Piaget. Biología y Conocimiento . pp 287, 288, 289 o 296 y siguientes. De manera precisa Piaget dice: está asociada a una función organizadora de los seres vivientes. Esta la define como la “reconstrucción convergente con superación”. p. 303.

[51] Von Glaserfeld, E. "An introduction to radical constructivism", en el libro editado por P. Walzlawick: The invented reality (pp. 17-40). New York: Norton.

[52] Von Glaserfeld, E. Learning as a constructive activity. En el libro editado por C. Janvier Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 3-189. Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

[53] Von Glaserfeld, E. “Constructivism in Education” en la obra editada por Huse, T. y Postlethwaite, T. N. The International Encyclopedia of Education Suplementary Volume , Oxford: Pergamon Press, 1989.

[54] Véase "Problems of developmental teaching" (Parte 1) en Soviet Education , 30 (8), 6-97, 1988.

[55] Cfr. "The problem of activity in psychology" en el libro editado por J. V. Wersch The concept of activity in Soviet Psychology . Armonk, N. Y.: Sharpe, 1981.

[56] Aunque asumen como suya la herencia de diferentes psicólogos que se distanciaron de las aproximaciones basadas en el individualismo y buscaron una referencia social más amplia para la acción psicológica: Brown, Collins y Duguid, por ejemplo en "Situation cognition and the culture of learning" en Educational Researcher , 18 (1), 32-34, 1989; también en J. G. Greeno "Number sense as situated knowing in a conceptual domain" en el Journal for research in Mathematics Education, 22, 170-218, 1991, y en el trabajo editado por A. H. Schoenfeld Cognitive science and mathematics education (pp. 189-216) Hillsdate, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates en 1987.

[57] Vygotsky, L. S. "Consciousness as a problem in the psychology of behavior" en Soviet Psychology , 17 (49, 3-35), 1979, p. 30.

[58] Véase E. von Glaserfeld en "Cognition, construction of knowledge, and teaching" en Synthese , 80, 121-140, 1989.

[59] Von Glaserfeld. Op. cit. p 136.

[60] Consúltese H. Bauersfeld en "Hidden dimensions in the so-called reality of mathematics classroom" en Educational Studies in Mathematics, 11, 23-41 en 1980; y también véase, Bauersfeld, Krammheuer y Voigt "International theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies" en el libro editado por H. G. Steiner y A. Vermandel: Foundations and methodology of the discipline of mathematics education (pp. 174-1889) Antwerp, Bélgica: (Proceedings of the TME Conference), 1988.

[61] Véase "'Language games' in the mathematics classroom: their function and their effects", en el libro editado por P. Cobb y H. Bauersfeld The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1994.

[62] Consúltese el libro de L. S. Vygotsky Mind and society: the development of higher mental processes. Cambridge, Boston: Harvard University Press 1978, o la versión original de 1960 en ruso Razvitie vysshikh psikhicheskikh funktsii , Moscú: Akad. Ped. Nauk.

[63] Un estudio publicado por S. Carey y R. Gelman en 1991 ("neopiagetianos") lo codifica así, véase The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition . Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

[64] Cfr. Spelke, E. S. "Perceptual knowledge of objects in infancy", en el libro editado por J. Mehler, E. C. T. Walker y M. Garret: Perceptives in mental representation: Experimental and theorical studies of cognitive processes and capacities (pp. 409-430). Hillsdale, N. J.: Erlbaum.

[65] Al igual que en la tradición hegeliana, el sujeto es objetivizado y el objeto subjetivizado .

[66] Por ejemplo, como señala Paul Cobb en torno a Rogoff (una seguidora de las ideas de Vygotsky) y Glaserfeld: "Comparando el trabajo de Rogoff y Glaserfeld se puede notar que la visión de Rogoff del aprendizaje como aculturalización a través de la participación dirigida, asume implícitamente un niño que construye activamente. Al mismo tiempo, la visión de Glaserfeld del aprendizaje como una auto-organización cognoscitiva asume implícitamente que el niño está participando en actividades culturales. En efecto, la actividad de construcción individual constituye el marco frente al cual la participación en prácticas culturales se da en Rogoff, y esta participación es el marco frente al cual la auto-organización se da para von Glaserfeld" Cobb, Paul: "Where is the mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development" en la revista Educational Researcher volumen 23, número 7, octubre de 1994, p. 17.

[67] La argentina Hebe Vessuri en su libro La ciencia periferica, y a diferencia de Shils, dice que "es posible adquirir conocimiento a través de este tipo de estudios" y que éstos pueden tener "carácter científico". Vessuri, Hebe (y otros): La ciencia periférica. Caracas: Monte Avila Editores, 1983. P.11.

[68] ¿Acaso no hemos sido testigos del especialista en educación general sin formación en una disciplina que se atreve a juzgar y dictaminar sobre la enseñanza de esa disciplina?